2. Übungsblatt - Analysis auf Mannigfaltigkeiten - WS 2011

1. Zeigen Sie:

   (a) Ist $F : M \to N$ glatt, so sind die Koordinatendarstellungen von F bezüglich *jedem* Paar glatter Karten (U, φ) und (V, ψ) von M bzw. N mit $F(U) \subseteq V$ glatt.

   (b) Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von M. Gibt es zu jedem $\alpha \in A$ eine glatte Abbildung $F_\alpha : U_\alpha \to N$, sodass $F_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = F_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ für alle $\alpha, \beta \in A$, dann gibt es eine eindeutig bestimmte glatte Abbildung $F : M \to N$ mit $F|_{U_\alpha} = F_\alpha$ für alle $\alpha \in A$.

2. (a) Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand. Zeigen Sie, dass die Eigenschaft Rand- bzw. innerer Punkt von M zu sein koordinatenunabhängig ist.

   (b) Zeigen Sie, dass die Inklusionsabbildung $\mathrm{cl}\,\mathbb{B}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ glatt ist, wenn die abgeschlossene Einheitskugel $\mathrm{cl}\,\mathbb{B}^n$ als Mannigfaltigkeit mit Rand angesehen wird.

3. Seien $M_1, \ldots, M_k, N$ glatte Mannigfaltigkeiten und $\pi_i : M_1 \times \cdots \times M_k \to M_i$ die Projektion auf den i-ten Faktor. Eine Abbildung $F : N \to M_1 \times \cdots \times M_k$ ist genau dann glatt, wenn jede der Komponentenfunktionen $\pi_i \circ F : N \to M_i$ glatt ist.

4. Der n-dimensionale reelle projektive Raum $\mathbb{RP}^n$ ist die Menge aller 1-dimensionalen linearen Unterräume des $\mathbb{R}^{n+1}$. Wir versehen $\mathbb{RP}^n$ mit der Quotiententopologie die durch die Abbildung $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{RP}^n$, die $x \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ auf den von x aufgespannten Unterraum $[x]$ abbildet, bestimmt wird.
   Für $i = 1, \ldots, n+1$ sei $\overline{U_i} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} : x^i \neq 0\}$ und $U_i = \pi(\overline{U}_i) \subseteq \mathbb{RP}^n$. Wir definieren noch $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ durch

   $$\varphi_i[x^1, \ldots, x^{n+1}] = \left(\frac{x^1}{x^i}, \ldots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \ldots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right).$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{RP}^n$ eine kompakte, topologische n-Mannigfaltigkeit ist auf der die Karten (U_i, φ_i), $1 \leq i \leq n$, einen glatten Atlas bilden.

   (b) Es sei $d \in \mathbb{Z}$ und $P : \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^{k+1} \backslash \{0\}$ eine glatte Abbildung mit der Eigenschaft, dass $P(\lambda x) = \lambda^d P(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ und $x \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\overline{P} : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^k$ definiert durch $\overline{P}[x] = [P(x)]$ glatt ist.

5. Der n-dimensionale komplexe projektive Raum $\mathbb{CP}^n$ ist die Menge aller 1-dimensionalen komplex-linearen Unterräume des $\mathbb{C}^{n+1}$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{CP}^n$ eine kompakte, topologische $2n$-Mannigfaltigkeit ist und genau so wie der reelle projektive Raum $\mathbb{RP}^n$ mit einer glatten Struktur versehen werden kann.

   (b) Es bezeichne $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Riemannsche Zahlenkugel. Zeigen Sie, dass durch die Karten $(\mathbb{C}, \mathrm{id}_\mathbb{C})$ und (U_∞, φ) mit $U_\infty = \{z \in \mathbb{C}_\infty : z \neq 0\}$ und $\varphi(z) = z^{-1}$ die Riemannsche Zahlenkugel zu einer glatten Mannigfaltigkeit wird.

   (c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{C}_\infty \cong S^2$.

6. Es sei M eine zusammenhängende glatte Mannigfaltigkeit und $\pi : \overline{M} \to M$ eine topologische Überlagerung. Zeigen Sie, dass es genau eine glatte Struktur auf $\overline{M}$ gibt bezüglich der π eine glatte Überlagerung ist.

   Hinweis: Verwenden Sie die Existenz glatter lokaler Schnitte.

7. Es sei G eine zusammenhängende Lie Gruppe und $U \subseteq G$ eine beliebige Umgebung des neutralen Elements. Zeigen Sie, dass jedes Element von G als endliches Produkt von Elementen aus U geschrieben werden kann.

8. Es sei G eine Lie Gruppe und G_0 die Zusammenhangskomponente von G, die das neutrale Element von G enthält. Zeigen Sie:

   (a) G_0 ist die einzige zusammenhängende offene Untergruppe von G.

   (b) Jede zusammenhängende Komponente von G ist diffeomorph zu G_0.