# 3. Übungsblatt - Analysis auf Mannigfaltigkeiten - WS 2011

1. Es sei $M$ ein topologischer Raum mit der Eigenschaft, dass es zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{X}$ von $M$ eine $\mathcal{X}$ untergeordnete Zerlegung der Eins gibt. Zeigen Sie, dass $M$ parakompakt ist.

2. Es sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit, $B \subseteq M$ eine abgeschlossene Menge und $\delta : M \to \mathbb{R}$ eine positive stetige Funktion.

   (a) Verwenden Sie eine geeignete Zerlegung der Eins, um zu zeigen, dass es eine glatte Funktion $\overline{\delta} : M \to \mathbb{R}$ mit $0 < \overline{\delta}(x) < \delta(x)$ für alle $x \in M$ gibt.

   (b) Zeigen Sie, dass es eine stetige Funktion $\psi : M \to \mathbb{R}$ gibt, die glatt und positiv auf $M \backslash B$ und identisch Null auf $B$ ist, und außerdem $\psi(x) < \delta(x)$ für alle $x \in M$ erfüllt.

3. Es seien $M, N, P$ glatte Mannigfaltigkeiten, $F : M \to N$ und $G : N \to P$ glatte Abbildungen und $p \in M$. Dann gelten folgende Aussagen:

   (a) $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ ist linear.

   (b) $(G \circ F)_* = G_* \circ F_* : T_pM \to T_{G\circ F(p)}P$.

   (c) $(\mathrm{Id}_M)_* = \mathrm{Id}_{T_pM} : T_pM \to T_pM$.

   (d) Ist $F$ ein Diffeomorphismus, dann ist $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ ein Isomorphismus.

   (e) Ist $M$ zusammenhängend und $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ die Nullabbildung für jedes $p \in M$, dann ist $F$ konstant.

4. Es seien $M_1, \ldots, M_k$ glatte Mannigfaltigkeiten und $\pi_j : M_1 \times \cdots \times M_k \to M_j$ die Projektion auf den $j$-ten Faktor. Zeigen Sie, dass für jede Wahl von $p_i \in M_i$, $i = 1, \ldots, k$ die Abbildung

   $$\alpha : T_{(p_1,\ldots,p_k)}(M_1 \times \cdots \times M_k) \to T_{p_1}M_1 \oplus \cdots \oplus T_{p_k}M_k$$

   definiert durch

   $$\alpha(X) = (\pi_{1*}X, \ldots, \pi_{k*}X)$$

   ein Isomorphismus ist.

5. Es sei $G$ eine Lie Gruppe.

   (a) Es bezeichne $m : G \times G \to G$ die Gruppenmultiplikation. Zeigen Sie, dass

   $$m_* : T_{(e,e)}(G \times G) \cong T_eG \oplus T_eG \to T_eG$$

   durch $m_*(X, Y) = X + Y$ gegeben ist.

   (b) Es bezeichne $i : G \to G$ die Gruppeninversion. Zeigen Sie, dass $i_* : T_eG \to T_eG$ durch $i_*X = -X$ gegeben ist.

6. Es sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit. Für jedes $p \in M$ bezeichne $C_p^\infty$ die Algebra der Keime von glatten reellwertigen Funktionen an $p$ und $\mathcal{D}_p$ sei der Vektorraum der Derivationen von $C_p^\infty$. Eine *Derivation der Algebra* $C_p^\infty$ ist ein Vektorraumhomomorphismus $D : C_p^\infty \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g)$, wobei $f(p)$ und $g(p)$ die Auswertung eines Keims bei $p$ bezeichnet (diese ist klarerweise wohldefiniert).

   Zeigen Sie, dass $T_pM$ und $\mathcal{D}_p$ isomorph sind.

7. Es sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Es bezeichne $\mathcal{C}_p$ die Menge aller glatten Kurven $\gamma : J \to M$ mit $0 \in J$ und $\gamma(0) = p$. Auf $\mathcal{C}_p$ sei weiters eine Äquivalenzrelation wie folgt definiert: $\gamma_1 \sim \gamma_2$, wenn $(f \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \gamma_2)'(0)$ für jede glatte reellwertige Funktion $f$, die in einer Umgebung von $p$ definiert ist. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi : \mathcal{C}_p/\sim \to T_pM$, gegeben durch $\Phi[\gamma] = \gamma'(0)$, wohldefiniert und bijektiv ist.