4. Übungsblatt - Analysis auf Mannigfaltigkeiten - WS 2011

1. (a) Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $f \in C^\infty(M)$ und $Y \in \mathcal{T}(M)$. Dann ist $fY : M \to TM$, definiert durch
$$(fY)_p = f(p)Y_p$$
ein glattes Vektorfeld.

   (b) Es seien $M_1, \dots, M_k$ glatte Mannigfaltigkeiten und für jedes $i = 1, \dots, k$ bezeichne $\pi : M_1 \times \cdots \times M_k \to M_i$ die Projektion auf den i-ten Faktor. Zeigen Sie, dass es zu jedem $X \in \mathcal{T}(M_i)$ ein glattes Vektorfeld auf $M_1 \times \cdots \times M_k$ gibt, welches π_i-verwandt mit X ist.

2. (a) Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung in Polarkoordinaten für das folgende Vektorfeld im $\mathbb{R}^2$:
$$V = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

   (b) Berechnen Sie die Lie Klammer für das folgende Paar von Vektorfeldern im $\mathbb{R}^3$:
$$V = y\frac{\partial}{\partial z} - 2xy^2\frac{\partial}{\partial y}, \qquad W = \frac{\partial}{\partial y}.$$

3. (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem Kreuzprodukt eine Lie Algebra ist.

   (b) Es sei $A \subseteq \mathcal{T}(\mathbb{R}^3)$ der Unteraum, der von den Vektorfeldern
$$X = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, \qquad Z = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$$
aufgespannt wird. Zeigen Sie, dass A eine Lie Unteralgebra von $\mathcal{T}(\mathbb{R}^3)$ ist, die isomorph zu $\mathbb{R}^3$ mit Kreuzprodukt als Lie Klammer ist.

4. Zeigen Sie, dass die Lie Algebra Lie(G) jeder abelschen Lie Gruppe G abelsch ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Inversion $i : G \to G$ ein Gruppenhomomorphismus ist und verwenden Sie Beispiel 5 der 3. Übung.

5. Bestimmen Sie für die folgenden glatten Mannigfaltigkeiten M und glatten Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ jeweils die Koordinatendarstellung von df in Bezug auf die angegebenen Koordinaten:

   (a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ und $f(x, y) = x/(x^2 + y^2)$;
   Standard kartesische Koordinaten (x, y).

   (b) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ und $f(x, y) = x/(x^2 + y^2)$;
   Polarkoordinaten (r, θ).

   (c) $M = \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ und $f(p) = z$-Koordinate von p;
   Stereographische Koordinaten.

6. Es bezeichne $\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ die Determinantenfunktion.

   (a) Unter Verwendung von Matrixeinträgen (X_{ij}) als globale Koordinaten auf $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, zeigen Sie, dass

   $$\frac{\partial}{\partial X_{ij}}(\det X) = (\det X)(X^{-1})_{ji}.$$

   (b) Verwenden Sie (a) um zu zeigen, dass das Differential von det gegeben ist durch

   $$d(\det)_X(B) = (\det X)\mathrm{tr}(X^{-1}B),$$

   wobei $X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $B \in T_X\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cong \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ und $\mathrm{tr}\, X$ die Spur von X bezeichnet.

   (c) Betrachten wir $\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ als Lie Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass der induzierte Lie Algebren Homomorphismus gegeben ist durch $\mathrm{tr} : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

7. Es seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten, $F : M \to N$ eine glatte Abbildung und $\omega \in \mathcal{T}^*(N)$. Zeigen Sie, dass für jedes stückweise glatte Kurvensegment in M gilt

   $$\int_\gamma F^*\omega = \int_{F\circ\gamma} \omega.$$