

5. Übungsblatt - Analysis auf Mannigfaltigkeiten - WS 2011

1. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\pi : T^*M \rightarrow M$ die kanonische Projektion. Wir definieren ein Kovektorfeld α auf T^*M durch

$$\alpha_p(v) = \xi(\pi_*v), \quad v \in T_p(T^*M), \quad p = (x, \xi), \quad \xi \in T_x^*M.$$

Es seien (U, x_1, \dots, x_n) Koordinaten für M und $(T^*U, x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ die zugehörigen Koordinaten für T^*M . Zeigen Sie, dass bezüglich dieser Koordinaten

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i$$

gilt.

2. Es seien M_1 und M_2 glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M_1 \rightarrow M_2$ ein Diffeomorphismus. Wir definieren eine Abbildung $F_{\sharp} : T^*M_1 \rightarrow T^*M_2$ durch

$$F_{\sharp}(x, \xi) = (F(x), (F^*)^{-1}\xi).$$

Zeigen Sie:

- (a) $F_{\sharp} : T^*M_1 \rightarrow T^*M_2$ ist glatt.
 - (b) $(G \circ F)_{\sharp} = G_{\sharp} \circ F_{\sharp}$ für Diffeomorphismen $F : M_1 \rightarrow M_2$ und $G : M_2 \rightarrow M_3$.
 - (c) $F_{\sharp} : T^*M_1 \rightarrow T^*M_2$ ist ein Diffeomorphismus.
3. Beweise Sie die Aussagen der Beispiele (a)-(d) auf Seite 69 im Skriptum.
4. Wir definieren eine Abbildung $F : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ durch

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz).$$

- (a) Zeigen Sie, dass F glatt ist.
- (b) Es bezeichne $p : S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie, dass F eine glatte Einbettung $\tilde{F} : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ induziert,

$$\begin{array}{ccc} S^2 & & \\ \downarrow p & \searrow F & \\ \mathbb{RP}^2 & \xrightarrow{\tilde{F}} & \mathbb{R}^4 \end{array}$$

5. Es sei M eine glatte, kompakte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass es keine Submersion $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$, $k > 0$, gibt.
6. (a) Es sei $\pi : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung mit der Eigenschaft, dass jeder Punkt von M im Bild eines glatten lokalen Schnittes von π liegt. Zeigen Sie, dass π eine Submersion ist.
(b) Es sei $\pi : M \rightarrow N$ eine Submersion und $X \in \mathcal{T}(N)$. Zeigen Sie, dass es auf M ein glattes Vektorfeld gibt, das mit X π -verwandt ist. Ist dieses Vektorfeld dadurch eindeutig bestimmt?
7. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und S eine Teilmenge von M für die jeder Punkt $p \in S$ eine Umgebung $U \subseteq M$ besitzt, sodass $U \cap S$ eine eingebettete k -Untermannigfaltigkeit von U ist. Zeigen Sie, dass dann auch S eine eingebettete k -Untermannigfaltigkeit von M ist.