6. Übungsblatt - Analysis auf Mannigfaltigkeiten - WS 2011

1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : N \to M$ eine Immersion. Dann gibt es zu jedem $p \in N$ eine Umgebung U von p in N, sodass $F|_U : U \to M$ eine glatte Einbettung ist.

   (b) Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $S \subseteq M$ eine immersierte Untermannigfaltigkeit. Jeder Punkt $p \in S$ ist im Bild einer lokalen Parametrisierung von S enthalten. Ist $X : U \to M$ eine beliebige lokale Parametrisierung von S, dann gibt es eine eindeutig bestimmte glatte Karte (V, φ) von S, sodass $X = \iota \circ \varphi^{-1}$, wobei $\iota : S \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung bezeichnet.

2. Es sei M eine glatte n-Mannigfaltigkeit mit Rand. Zeigen Sie, dass dann ∂M eine eingebettete $(n-1)$-Untermannigfaltigkeit (ohne Rand) von M ist.

3. Es sei $S \subseteq N$ eine abgeschlossene eingebettete Untermannigfaltigkeit. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Ist $f \in C^\infty(S)$ (d.h. f ist glatt als Funktion auf S, nicht als Funktion auf der abgeschlossenen Teilmenge S von N), dann ist f Einschränkung einer glatten Funktion auf N.

   (b) Ist $X \in \mathcal{T}(S)$, dann gibt es ein glattes Vektorfeld Y auf N mit $X = Y|_S$.

4. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Zwei eingebettete Untermannigfaltigkeiten $S_1, S_2 \subset M$ schneiden sich *transversal*, falls $T_pM = T_pS_1 + T_pS_2$ für alle $p \in S_1 \cap S_2$ gilt. Zeigen Sie, dass in diesem Fall der Schnitt $S_1 \cap S_2$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von M mit Dimension $\dim S_1 + \dim S_2 - \dim M$ ist. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass man nicht ersatzlos auf Transversalität verzichten kann.

5. Es sei Γ eine diskrete Gruppe, die stetig auf auf einer Mannigfaltigkeit M wirkt. Zeigen Sie, dass die Aktion von Γ genau dann eigentlich ist, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

   (i) Jeder Punkt $p \in M$ besitzt eine Umgebung U, sodass $(\varphi \cdot U) \cap U = \emptyset$ für alle bis auf endlich viele $\varphi \in \Gamma$.

   (ii) Sind $p, p' \in M$ nicht im selben Γ-Orbit enthalten, dann gibt es Umgebungen U von p und U' von p', sodass $(\varphi \cdot U) \cap U' = \emptyset$ für alle $\varphi \in \Gamma$.

6. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Es sei G eine Lie Gruppe und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Eine glatte Aktion von G auf V ist genau dann linear, wenn sie von der Form $g \cdot v = \rho(g)v$ für eine geeignete Darstellung ρ von G ist.

(b) Eine Lie Gruppe besitzt genau dann eine treue Darstellung, wenn sie isomorph zu einer Lie Untergruppe von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ oder $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ ist.

7. Die Lie Algebra $\mathfrak{so}(3)$ von $SO(3)$ besteht aus schiefsymmetrischen 3×3 Matrizen.

   (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

   ein Lie Algebrenisomorphismus von $\mathfrak{so}(3)$ nach $\mathbb{R}^3$ ist. Die Lie Klammer auf $\mathbb{R}^3$ ist hier durch das Kreuzprodukt gegeben, vgl. Übungsblatt 4, Aufgabe 3.

   (b) $SO(3)$ agiert auf $\mathfrak{so}(3)$ durch die adjungierte Darstellung. Zeigen Sie, dass unter dem Isomorphismus $\mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3$ diese Aktion der Standard-$SO(n)$-Aktion auf $\mathbb{R}^3$ durch Rotationen entspricht.