7. Übungsblatt - Analysis auf Mannigfaltigkeiten - WS 2011

1. Es bezeichne $\mathcal{H}$ den Vektorraum aller komplexen, hermitschen $n \times n$ Matrizen. Die unitäre Gruppe $U(n)$ agiert auf $\mathcal{H}$ durch Konjugation, $g \cdot A = gAg^{-1}$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{H}_\lambda \subset \mathcal{H}$ die Menge aller Matrizen mit Spektrum $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

   (a) Zeigen Sie, dass die Teilmengen $\mathcal{H}_\lambda$ genau die Orbits der $U(n)$-Wirkung auf $\mathcal{H}$ sind.

   (b) Zeigen Sie, dass es im Fall $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$ einen Diffeomorphismus $\mathcal{H}_\lambda \cong \mathbb{CP}^{n-1}$ gibt. Beschrieben Sie auch die anderen Orbits $\mathcal{H}_\lambda$.

   Hinweis: Falls die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ alle verschieden sind, dann bestimmt jedes Element $A \in \mathcal{H}_\lambda$ eine Familie von paarweise orthogonalen Unterräume von $\mathbb{C}^n$, die Eigenräume von A.

2. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume. Angenommen $\overline{\pi} : V \times W \to Z$ ist eine bilineare Abbildung in einen Vektorraum Z mit der folgenden Eigenschaft: Zu jeder bilinearen Abbildung $A : V \times W \to Y$, gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\overline{A} : Z \to Y$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\overline{\pi}"'] & Y \\ Z \arrow[ur, "\overline{A}"'] & \end{tikzcd}$$

   Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $\Phi : V \otimes W \to Z$ mit $\overline{\pi} = \Phi \circ \pi$, wobei $\pi : V \times W \to V \otimes W$ die kanonische Projektion bezeichnet.

   (b) Ist V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum, dann ist der Raum $T^k(V)$ aller kovarianten k-Tensoren auf V kanonisch isomorph zum k-fachen Tensorprodukt $V^* \otimes \cdots \otimes V^*$.

3. Beweisen Sie Proposition 7.7, Proposition 7.8 und Lemma 7.18.

4. Beweisen Sie folgende Aussagen:

   (a) Das symmetrische Produkt ist kommutativ und bilinear.

   (b) Sind S, T kovariante 1-Tensoren, dann gilt

$$ST = \frac{1}{2}(S \otimes T + T \otimes S).$$

5. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und A eine abgeschlossene Teilmenge von M. Es sei weiters ω eine glatte Differentialform auf A, in dem Sinn, dass ω zu einer glatten Differentialform in der Umgebung jedes Punktes von A fortgesetzt werden kann. Zeigen Sie, dass es zu jeder offenen Menge U, die A enthält, eine glatte Differentialform $\overline{\omega} \in \Omega^k(M)$ gibt, sodass $\overline{\omega}|_A = \omega$ und $\operatorname{supp} \overline{\omega} \subseteq U$ gilt.

6. Für $v, w \in \mathbb{R}^3$ bezeichne (v, w) das gewöhnliche Skalarprodukt und $v \times w$ das Kreuzprodukt von v und w. Zeigen Sie, dass

$$\omega_u(v, w) = (u, v \times w),$$

wobei $u \in S^2$ und $v, w \in T_u S^2 \subset T_u \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$, eine glatte 2-Form auf der Sphäre S^2 definiert. Betrachten Sie Zylinderkoordinaten (θ, z), $0 < \theta < 2\pi$ und $-1 < z < 1$, auf S^2 und zeigen Sie, dass bezüglich dieser Koordinaten

$$\omega = d\theta \wedge dz$$

gilt.

7. Es sei M eine glatte n-Mannigfaltigkeit, $\{E_i\}$ ein glatter lokaler Frame für M und $\{\varepsilon^i\}$ der dazu duale Koframe. Es seien c^i_{jk}, $i = 1, \dots n$, die Komponentenfunktionen der Lie Klammer $[E_j, E_k]$ bezüglich dieses Frames, also

$$[E_j, E_k] = \sum_i c^i_{jk} E_i.$$

Dann ist die äußere Ableitung jeder 1-Form ε^i gegeben durch

$$d\varepsilon^i = -\sum_{j,k} c^i_{jk} \varepsilon^j \wedge \varepsilon^k.$$