Analysis auf Mannigfaltigkeiten - 2. Übungsblatt - 24.04.2013

1. Zeigen Sie:
   (a) Ist $F\colon M \to N$ glatt, so ist die Koordinatendarstellung von F bezüglich *jedem* Paar glatter Karten (U, φ) und (V, ψ) von M bzw. N mit $F(U) \subseteq V$ glatt.
   (b) Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ eine offene Überdeckung von M. Gibt es zu jedem $\alpha \in A$ eine glatte Abbildung $F_\alpha\colon U_\alpha \to N$, sodass $F_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} = F_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}$ für alle $\alpha, \beta \in A$, dann gibt es eine eindeutig bestimmte glatte Abbildung $F\colon M \to N$ mit $F|_{U_\alpha} = F_\alpha$ für alle $\alpha \in A$.

2. (a) Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand. Zeigen Sie, dass die Eigenschaft Rand- bzw. innerer Punkt von M zu sein koordinatenunabhängig ist.
   (b) Zeigen Sie, dass die Inklusionsabbildung $\operatorname{clos}\mathbb{B}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ glatt ist, wenn die abgeschlossene Einheitskugel $\operatorname{clos}\mathbb{B}^n$ als Mannigfaltigkeit mit Rand angesehen wird.

3. Seien $M_1, \dots, M_k, N$ glatte Mannigfaltigkeiten und $\pi_i\colon M_1 \times \ldots \times M_k \to M_i$ die Projektion auf den i-ten Faktor. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $F\colon N \to M_1 \times \ldots \times M_k$ genau dann glatt ist, wenn jede der Komponentenfunktionen $\pi_i \circ F\colon N \to M_i$ glatt ist.

4. Der n-dimensionale reelle projektive Raum $\mathbb{RP}^n$ ist die Menge aller 1-dimensionalen linearen Unterräume des $\mathbb{R}^{n+1}$. Wir versehen $\mathbb{RP}^n$ mit der Quotiententopologie, die durch die Abbildung $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$, die $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ auf den von x aufgespannten Unterraum $[x]$ abbildet, bestimmt wird.

   Für $i = 1, \dots, n+1$ sei $\overline{U_i} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\colon x^i \neq 0\}$ und $U_i = \pi(\overline{U}_i) \subseteq \mathbb{RP}^n$. Wir definieren noch $\varphi_i\colon U_i \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\varphi_i[x^1, \dots, x^{n+1}] = \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i}\right).$$

   Offenbar ist φ_i injektiv mit der Inversen

$$\varphi_i^{-1}(u^1, \dots, u^n) = [u^1, \dots, u^{i-1}, 1, u^i, \dots, u^n].$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{RP}^n$ eine topologische n-Mannigfaltigkeit ist, auf der die Karten (U_i, φ_i), $1 \leq i \leq n$, einen glatten Atlas bilden.
   (b) Es sei $d \in \mathbb{Z}$ und $P\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$ eine glatte Abbildung mit der Eigenschaft, dass $P(\lambda x) = \lambda^d P(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\overline{P}\colon \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^k$ definiert durch $\overline{P}[x] = [P(x)]$ glatt ist.

5. Es sei M eine topologische n-Mannigfaltigkeit. Eine *differenzierbare Struktur* $\mathcal{D}_M$ auf M ist eine Familie von auf offenen Mengen von M definierten stetigen Funktionen, sodass:
   - Zu jedem $p \in M$ gibt es eine Umgebung U von p und einen Homöomorphismus $h\colon U \to U' \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass für jede offene Menge $V \subseteq U$ gilt $f\colon V \to \mathbb{R} \in \mathcal{D}_M$ genau dann, wenn $f \circ h^{-1} \in C^\infty(h(V))$.
   - Ist $U = \bigcup U_i$ mit U_i offen in M, dann ist $f\colon U \to \mathbb{R} \in \mathcal{D}_M$ genau dann, wenn $f|_{U_i} \in \mathcal{D}_M$ für jedes i.

   Eine stetige Funktion $F\colon (M, \mathcal{D}_M) \to (N, \mathcal{D}_N)$ heißt *differenzierbar*, wenn $f \circ F \in \mathcal{D}_M$ für jedes $f \in \mathcal{D}_N$.

   Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte glatte Strukturen auf M und N gibt, sodass eine stetige Funktion $F\colon M \to N$ genau dann differenzierbar ist, wenn sie glatt ist.

6. Es sei M eine zusammenhängende glatte Mannigfaltigkeit und $\pi\colon \overline{M} \to M$ eine topologische Überlagerung. Zeigen Sie, dass es genau eine glatte Struktur auf $\overline{M}$ gibt, bezüglich der π eine glatte Überlagerung ist.

   Hinweis: Verwenden Sie die Existenz glatter lokaler Schnitte.

7. Es sei G eine zusammenhängende Lie Gruppe und $U \subseteq G$ eine beliebige Umgebung des neutralen Elements. Zeigen Sie, dass jedes Element von G als endliches Produkt von Elementen aus U geschrieben werden kann.

8. Es sei G eine Lie Gruppe und G_0 jene Zusammenhangskomponente von G, die das neutrale Element von G enthält. Zeigen Sie:
   (a) G_0 ist die einzige zusammenhängende offene Untergruppe von G.
   (b) Jede zusammenhängende Komponente von G ist diffeomorph zu G_0.