Analysis auf Mannigfaltigkeiten - 3. Übungsblatt - 08.05.2013

1. Es sei M ein topologischer Raum mit der Eigenschaft, dass es zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{X}$ von M eine $\mathcal{X}$ untergeordnete Zerlegung der Eins gibt. Zeigen Sie, dass M parakompakt ist.

2. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $B \subseteq M$ eine abgeschlossene Menge und $\delta\colon M \to \mathbb{R}$ eine positive stetige Funktion.
   (a) Verwenden Sie eine geeignete Zerlegung der Eins, um zu zeigen, dass es eine glatte Funktion $\overline{\delta}\colon M \to \mathbb{R}$ gibt mit $0 < \overline{\delta}(x) < \delta(x)$ für alle $x \in M$.
   (b) Zeigen Sie, dass es eine stetige Funktion $\psi\colon M \to \mathbb{R}$ gibt, die glatt und positiv auf $M \setminus B$ und identisch Null auf B ist, und außerdem $\psi(x) < \delta(x)$ für alle $x \in M$ erfüllt.

3. Es seien M, N, P glatte Mannigfaltigkeiten, $F\colon M \to N$ und $G\colon N \to P$ glatte Abbildungen und $p \in M$. Dann gelten folgende Aussagen:
   (a) $F_*\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ ist linear.
   (b) $(G \circ F)_* = G_* \circ F_*\colon T_pM \to T_{G\circ F(p)}P$.
   (c) $(\mathrm{Id}_M)_* = \mathrm{Id}_{T_pM}\colon T_pM \to T_pM$.
   (d) Ist F ein Diffeomorphismus, dann ist $F_*\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ ein Isomorphismus.
   (e) Ist M zusammenhängend und $F_*\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ die Nullabbildung für jedes $p \in M$, dann ist F konstant.

4. Es seien $M_1, \ldots, M_k$ glatte Mannigfaltigkeiten und $\pi_j\colon M_1 \times \ldots \times M_k \to M_j$ die Projektion auf den j-ten Faktor. Zeigen Sie, dass für jede Wahl von $p_i \in M_i$, $i = 1, \ldots, k$, die Abbildung

   $$\alpha\colon T_{(p_1,\ldots,p_k)}(M_1 \times \ldots \times M_k) \to T_{p_1}M_1 \oplus \ldots \oplus T_{p_k}M_k$$

   definiert durch

   $$\alpha(X) = (\pi_{1*}X, \ldots, \pi_{k*}X)$$

   ein Isomorphismus ist.

5. Es sei G eine Lie Gruppe.
   (a) Es bezeichne $m\colon G \times G \to G$ die Gruppenmultiplikation. Zeigen Sie, dass

   $$m_*\colon T_{(e,e)}(G \times G) \cong T_eG \oplus T_eG \to T_eG$$

   gegeben ist durch $m_*(X, Y) = X + Y$.

(b) Es bezeichne $i\colon G \to G$ die Gruppeninversion. Zeigen Sie, dass $m_*\colon T_eG \to T_eG$ gegeben ist durch $i_*X = -X$.

6. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Für jedes $p \in M$ bezeichne C_p^∞ die Algebra der Keime von glatten reellwertigen Funktionen an p und $\mathcal{D}_p$ sei der Vektorraum der Derivationen von C_p^∞ an p. Zeigen Sie, dass T_pM und $\mathcal{D}_p$ isomorph sind.

7. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Es bezeichne $\mathcal{C}_p$ die Menge aller glatten Kurven $\gamma\colon J \to M$ mit $0 \in J$ und $\gamma(0) = p$. Auf $\mathcal{C}_p$ sei weiters eine Äquivalenzrelation wie folgt definiert: $\gamma_1 \sim \gamma_2$, wenn $(f \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \gamma_2)'(0)$ für jede glatte reellwertige Funktion f, die in einer Umgebung von p definiert ist. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi\colon \mathcal{C}_p/{\sim} \to T_pM$, gegeben durch $\Phi[\gamma] = \gamma'(0)$, wohldefiniert und bijektiv ist.