

Analysis auf Mannigfaltigkeiten - 4. Übungsblatt - 15.05.2013

1. (a) Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $f \in C^\infty(M)$ und $Y \in \mathcal{T}(M)$. Zeigen Sie, dass $fY: M \rightarrow TM$, definiert durch

$$(fY)_p = f(p)Y_p$$

ein glattes Vektorfeld ist.

- (b) Es seien M_1, \dots, M_k glatte Mannigfaltigkeiten und für jedes $i = 1, \dots, k$ bezeichne $\pi_i: M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow M_i$ die Projektion auf den i -ten Faktor. Zeigen Sie, dass es zu jedem $X \in \mathcal{T}(M_i)$ ein glattes Vektorfeld auf $M_1 \times \dots \times M_k$ gibt, welches π_i -verwandt ist mit X .
2. (a) Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung in Polarkoordinaten für das folgende Vektorfeld im \mathbb{R}^2 :

$$V = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}.$$

- (b) Berechnen Sie die Lie Klammer für das folgende Paar von Vektorfeldern im \mathbb{R}^3 :

$$V = y \frac{\partial}{\partial z} - 2xy^2 \frac{\partial}{\partial y}, \quad W = \frac{\partial}{\partial y}.$$

3. (a) Zeigen Sie, dass der \mathbb{R}^3 versehen mit dem Kreuzprodukt eine Lie Algebra ist.
(b) Es sei $A \subseteq \mathcal{T}(\mathbb{R}^3)$ der Unterraum, der von den Vektorfeldern

$$X = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, \quad Z = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$$

aufgespannt wird. Zeigen Sie, dass A eine Lie Unteralgebra von $\mathcal{T}(\mathbb{R}^3)$ ist, die isomorph zum \mathbb{R}^3 mit dem Kreuzprodukt ist.

4. Zeigen Sie, dass die Lie Algebra $\text{Lie}(G)$ jeder abelschen Lie Gruppe G abelsch ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Inversion $i: G \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus ist und verwenden Sie Beispiel 5 der 3. Übung.

5. Bestimmen Sie für die folgenden glatten Mannigfaltigkeiten M und glatten Funktionen $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils die Koordinatendarstellung von df in Bezug auf die angebenen Koordinaten:

- (a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ und $f(x, y) = x/(x^2 + y^2)$;
Standard kartesische Koordinaten (x, y) .

- (b) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ und $f(x, y) = x/(x^2 + y^2)$;
 Polarkoordinaten (r, θ) .
- (c) $M = \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ und $f(p) = z$ -Koordinate von p ;
 Stereographische Koordinaten.

6. Es bezeichne $\det: \text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ die Determinantenfunktion.

- (a) Zeigen Sie unter Verwendung von Matrixeinträgen (X_i^j) als globale Koordinaten auf $\text{GL}(n, \mathbb{R})$, dass

$$\frac{\partial}{\partial X_i^j}(\det X) = (\det X)(X^{-1})_j^i.$$

- (b) Verwenden Sie (a) um zu zeigen, dass das Differential von \det gegeben ist durch

$$d(\det)_X(B) = (\det X)\text{tr}(X^{-1}B),$$

wobei $X \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$, $B \in T_X\text{GL}(n, \mathbb{R}) \cong \text{M}(n, \mathbb{R})$ und $\text{tr} X$ die Spur von X bezeichnet.

- (c) Wir betrachten $\det: \text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ als Lie Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass der induzierte Lie Algebren Homomorphismus gegeben ist durch $\text{tr}: \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

7. Es seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten, $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung und $\omega \in \mathcal{T}^*(N)$. Zeigen Sie, dass für jedes stückweise glatte Kurvensegment in M gilt

$$\int_{\gamma} F^*\omega = \int_{F \circ \gamma} \omega.$$