Analysis auf Mannigfaltigkeiten - 5. Übungsblatt - 29.05.2013

1. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\pi\colon T^*M \to M$ die kanonische Projektion. Wir definieren ein Kovektorfeld α auf T^*M durch

$$\alpha_p(v) = \xi(\pi_* v), \qquad v \in T_p(T^*M),\ p = (x, \xi),\ \xi \in T_x^*M.$$

Es seien $(U, x_1, \ldots, x_n)$ Koordinaten für M und $(T^*U, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ die zugehörigen Koordinaten für T^*M. Zeigen Sie, dass bezüglich dieser Koordinaten

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, dx_i$$

gilt.

2. Es seien M_1 und M_2 glatte Mannigfaltigkeiten und $F\colon M_1 \to M_2$ ein Diffeomorphismus. Wir definieren eine Abbildung $F_\sharp\colon T^*M_1 \to T^*M_2$ durch

$$F_\sharp(x, \xi) = (F(x), (F^*)^{-1}\xi).$$

Zeigen Sie:

   (a) $F_\sharp\colon T^*M_1 \to T^*M_2$ ist glatt.

   (b) $(G \circ F)_\sharp = G_\sharp \circ F_\sharp$ für Diffeomorphismen $F\colon M_1 \to M_2$ und $G\colon M_2 \to M_3$.

   (c) $F_\sharp\colon T^*M_1 \to T^*M_2$ ist ein Diffeomorphismus.

3. Beweisen Sie die Aussagen der Beispiel (a)-(d) auf Seite 69 im Skriptum.

4. Wir definieren eine Abbildung $F\colon S^2 \to \mathbb{R}^4$ durch

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz).$$

   (a) Zeigen Sie, dass F glatt ist.

   (b) Es bezeichne $p\colon S^2 \to \mathbb{RP}^2$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie, dass F eine glatte Einbettung $\tilde{F}\colon \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$ induziert:

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "F"] & \\ \mathbb{RP}^2 \arrow[r, "\tilde{F}"] & \mathbb{R}^4 \end{tikzcd}$$

5. Es sei M eine glatte, kompakte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass es keine Submersion $F\colon M \to \mathbb{R}^k$, $k > 0$, gibt.

6. (a) Es sei $\pi\colon M \to N$ eine glatte Abbildung mit der Eigenschaft, dass jeder Punkt von M im Bild eines glatten lokalen Schnittes von π liegt. Zeigen Sie, dass π eine Submersion ist.

   (b) Es sei $\pi\colon M \to N$ eine Submersion und $X \in \mathcal{T}(N)$. Zeigen Sie, dass es auf M ein glattes Vektorfeld gibt, das mit X π-verwandt ist. Ist dieses Vektorfeld dadurch eindeutig bestimmt?

7. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und S eine Teilmenge von M, für die jeder Punkt $p \in S$ eine Umgebung $U \subseteq M$ besitzt, sodass $U \cap S$ eine eingebettete k-Untermannigfaltigkeit von U ist. Zeigen Sie, dass dann auch S eine eingebettete k-Untermannigfaltigkeit von M ist.