Analysis auf Mannigfaltigkeiten - 7. Übungsblatt - 26.06.2013

1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume. Angenommen $\overline{\pi}\colon V \times W \to Z$ ist eine bilineare Abbildung in einen Vektorraum Z mit der folgenden Eigenschaft: Zu jeder bilinearen Abbildung $A\colon V \times W \to Y$, gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\overline{A}\colon Z \to Y$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\overline{\pi}"'] & Y \\ Z \arrow[ur, "\overline{A}"'] & \end{tikzcd}$$

   Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $\Phi\colon V \otimes W \to Z$ mit $\overline{\pi} = \Phi \circ \pi$, wobei $\pi\colon V \times W \to V \otimes W$ die kanonische Projektion bezeichnet.

   (b) Ist V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, dann ist der Raum $T^k(V)$ aller kovarianten k-Tensoren auf V kanonisch isomorph zum k-fachen Tensorprodukt $V^* \otimes \ldots \otimes V^*$.

2. Beweisen Sie Proposition 7.7, Proposition 7.8 und Lemma 7.18.

3. Beweisen Sie folgende Aussagen:

   (a) Das symmetrische Produkt ist kommutativ und bilinear.

   (b) Sind S, T kovariante 1-Tensoren, dann gilt

$$ST = \frac{1}{2}(S \otimes T + T \otimes S).$$

4. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und A eine geschlossene Teilmenge von M. Es sei weiters ω eine glatte Differentialform auf A, in dem Sinn, dass ω zu einer glatten Differentialform in der Umgebung jedes Punktes von A fortgesetzt werden kann. Zeigen Sie, dass es zu jeder offenen Menge U, die A enthält, eine glatte Differentialform $\overline{\omega} \in \Omega^k(M)$ gibt, sodass $\overline{\omega}|_A = \omega$ und $\operatorname{supp} \overline{\omega} \subseteq U$.

5. Für $v, w \in \mathbb{R}^3$ bezeichne $\langle v, w \rangle$ das gewöhnliche Skalarprodukt und $v \times w$ das Kreuzprodukt von v und w. Zeigen Sie, dass

$$\omega_u(v, w) = \langle u, v \times w \rangle$$

für $u \in S^2$ und $v, w \in T_u S^2 \subseteq T_u \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$, eine glatte 2-Form auf der Sphäre S^2 definiert. Betrachten Sie Zylinderkoordinaten (θ, z), $0 < \theta < 2\pi$ und $-1 < z < 1$, auf S^2 und zeigen Sie, dass bezüglich dieser Koordinaten

$$\omega = d\theta \wedge dz$$

gilt.

6. Es sei M eine glatte n-Mannigfaltigkeit, $\{E_i\}$ ein glatter lokaler Frame für M und $\{\varepsilon^i\}$ der dazu duale Koframe. Es seien c^i_{jk}, $i = 1, \ldots n$, die Komponentenfunktionen der Lie Klammer $[E_j, E_k]$ dieses Frames, also

$$[E_j, E_k] = \sum_i c^i_{jk} E_i.$$

Dann ist die äußere Ableitung jeder 1-Form ε^i gegeben durch

$$d\varepsilon^i = -\sum_{j,k} c^i_{jk} \varepsilon^j \wedge \varepsilon^k.$$