1. Übungsblatt - Analysis auf Mannigfaltigkeiten - SS 2016

1. Seien $M_1, \ldots, M_k$ topologische Mannigfaltigkeiten der Dimensionen $n_1, \ldots, n_k$. Zeigen Sie, dass $M_1 \times \cdots \times M_k$ eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n_1 + \cdots + n_k$ ist mit Karten der Form $(U_1 \times \cdots \times U_k, \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k)$, wobei (U_i, φ_i), $1 \leq i \leq k$, Karten auf M_i sind.

2. Es sei X ein lokal wegzusammenhängender topologischer Raum. Zeigen Sie:
   (a) Die Zusammenhangskomponenten von X sind offen in X.
   (b) Die Wegzusammenhangskomponenten von X stimmen mit den Zusammenhangskomponenten von X überein.
   (c) X ist genau dann zusammenhängend, wenn X wegzusammenhängend ist.

3. Es sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie:
   (a) Sind f, f' und g, g' Wege in X mit jeweils denselben Anfangs- und Endpunkten sowie $f(1) = f'(1) = g(0) = g'(0)$, so folgt aus $f \sim f'$ und $g \sim g'$ auch $f \cdot g \sim f' \cdot g'$.
   (b) Für Wege f, g, h in X gilt

   $$([f] \cdot [g]) \cdot [h] = [f] \cdot ([g] \cdot [h])$$

   wannimmer die Produkte definiert sind.

4. Es sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Zeigen Sie:
   (a) Die Fundamentalgruppen von X zu unterschiedlichen Basispunkten sind alle isomorph.
   (b) X ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn je zwei Wege in X mit gleichen Anfangs- und Endpunkten homotop sind.

5. Zeigen Sie, dass es auf dem Euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, überabzählbar viele verschiedene glatte Strukturen gibt.