2. Übungsblatt - Analysis auf Mannigfaltigkeiten - SS 2016

1. Zeigen Sie:

   (a) Ist $F : M \to N$ glatt, so sind die Koordinatendarstellungen von F bezüglich *jedem* Paar glatter Karte (U, φ) und (V, ψ) von M bzw. N mit $F(U) \subseteq V$ glatt.

   (b) Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von M. Gibt es zu jedem $\alpha \in A$ eine glatte Abbildung $F_\alpha : U_\alpha \to N$, sodass $F_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = F_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ für alle $\alpha, \beta \in A$, dann gibt es eine eindeutig bestimmte glatte Abbildung $F : M \to N$ mit $F|_{U_\alpha} = F_\alpha$ für alle $\alpha \in A$.

2. (a) Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand. Zeigen Sie, dass die Eigenschaft Rand- bzw. innerer Punkt von M zu sein koordinatenunabhängig ist.

   (b) Zeigen Sie, dass die Inklusionsabbildung $\operatorname{cl} \mathbb{B}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ glatt ist, wenn die abgeschlossene Einheitskugel $\operatorname{cl} \mathbb{B}^n$ als Mannigfaltigkeit mit Rand angesehen wird.

3. Seien $M_1, \ldots, M_k, N$ glatte Mannigfaltigkeiten und $\pi_i : M_1 \times \cdots \times M_k \to M_i$ die Projektion auf den i-ten Faktor. Eine Abbildung $F : N \to M_1 \times \cdots \times M_k$ ist genau dann glatt, wenn jede der Komponentenfunktionen $\pi_i \circ F : N \to M_i$ glatt ist.

4. Der n-dimensionale reelle projektive Raum $\mathbb{RP}^n$ ist die Menge aller 1-dimensionalen linearen Unterräume des $\mathbb{R}^{n+1}$. Wir versehen $\mathbb{RP}^n$ mit der Quotiententopologie die durch die Abbildung $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{RP}^n$, die $x \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ auf den von x aufgespannten Unterraum $[x]$ abbildet, bestimmt wird.
   Für $i = 1, \ldots, n+1$ sei $\overline{U_i} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} : x^i \neq 0\}$ und $U_i = \pi(\overline{U}_i) \subseteq \mathbb{RP}^n$. Wir definieren noch $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ durch

   $$\varphi_i[x^1, \ldots, x^{n+1}] = \left(\frac{x^1}{x^i}, \ldots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \ldots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right).$$

   Offenbar ist φ_i injektiv mit der Inversen

   $$\varphi^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = [u^1, \ldots, u^{i-1}, 1, u^i, \ldots, u^n].$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{RP}^n$ eine topologische n-Mannigfaltigkeit ist auf der die Karten (U_i, φ_i), $1 \leq i \leq n$, einen glatten Atlas bilden.

   (b) Es sei $d \in \mathbb{Z}$ und $P : \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^{k+1} \backslash \{0\}$ eine glatte Abbildung mit der Eigenschaft, dass $P(\lambda x) = \lambda^d P(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ und $x \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\overline{P} : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^k$ definiert durch $\overline{P}[x] = [P(x)]$ glatt ist.

5. Es sei M eine topologische n-Mannigfaltigkeit. Eine *differenzierbare Struktur* $\mathcal{D}_M$ auf M ist eine Familie von auf offenen Mengen von M definierten stetigen Funktionen, sodass

   - Zu jedem $p \in M$ gibt es eine Umgebung U von p und einen Homöomorphismus $h : U \to U' \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass für jede offene Menge $V \subseteq U$ gilt $f : V \to \mathbb{R} \in \mathcal{D}_M$ genau dann, wenn $f \circ h^{-1} \in C^\infty(h(V))$.

- Ist $U = \bigcup U_i$ mit U_i offen in M, dann ist $f : U \to \mathbb{R} \in \mathcal{D}_M$ genau dann, wenn $f|_{U_i} \in \mathcal{D}_M$ für jedes i.

Eine stetige Funktion $F : (M, \mathcal{D}_M) \to (N, \mathcal{D}_N)$ heißt *differenzierbar*, wenn $f \circ F \in \mathcal{D}_M$ für jedes $f \in \mathcal{D}_N$.

Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte glatte Strukturen auf M und N gibt, sodass eine stetige Funktion $F : M \to N$ genau dann differenzierbar ist, wenn sie glatt ist.

6. Es sei M ein topologischer Raum mit der Eigenschaft, dass es zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{X}$ von M eine $\mathcal{X}$ untergeordnete Zerlegung der Eins gibt. Zeigen Sie, dass M parakompakt ist.

7. Es seien M, N, P glatte Mannigfaltigkeiten, $F : M \to N$ und $G : N \to P$ glatte Abbildungen und $p \in M$. Dann gelten folgende Aussagen:

   (a) $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ ist linear.

   (b) $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p : T_pM \to T_{G\circ F(p)}P$.

   (c) $d(\mathrm{Id}_M)_p = \mathrm{Id}_{T_pM} : T_pM \to T_pM$.

   (d) Ist F ein Diffeomorphismus, dann ist $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ ein Isomorphismus.

   (e) Ist M zusammenhängend und $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ die Nullabbildung für jedes $p \in M$, dann ist F konstant.

8. Es seien $M_1, \ldots, M_k$ glatte Mannigfaltigkeiten und $\pi_j : M_1 \times \cdots \times M_k \to M_j$ die Projektion auf den j-ten Faktor. Zeigen Sie, dass für jede Wahl von $p_i \in M_i$, $i = 1, \ldots, k$ die Abbildung

$$\alpha : T_{(p_1,\ldots,p_k)}(M_1 \times \cdots \times M_k) \to T_{p_1}M_1 \oplus \cdots \oplus T_{p_k}M_k$$

   definiert durch

$$\alpha(X) = (d\pi_{1(p_1,\ldots,p_k)}X, \ldots, d\pi_{k(p_1,\ldots,p_k)}X)$$

   ein Isomorphismus ist.