

3. Übungsblatt - Analysis auf Mannigfaltigkeiten - SS 2016

1. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Für jedes $p \in M$ bezeichne C_p^∞ die Algebra der Keime von glatten reellwertigen Funktionen an p und \mathcal{D}_p sei der Vektorraum der Derivationen von C_p^∞ an p . Zeigen Sie, dass T_pM und \mathcal{D}_p isomorph sind.
2. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Es bezeichne \mathcal{C}_p die Menge aller glatten Kurven $\gamma : J \rightarrow M$ mit $0 \in J$ und $\gamma(0) = p$. Auf \mathcal{C}_p sei weiters eine Äquivalenzrelation wie folgt definiert: $\gamma_1 \sim \gamma_2$, wenn $(f \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \gamma_2)'(0)$ für jede glatte reellwertige Funktion f , die in einer Umgebung von p definiert ist. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi : \mathcal{C}_p / \sim \rightarrow T_pM$, gegeben durch $\Phi[\gamma] = \gamma'(0)$, wohldefiniert und bijektiv ist.
3. Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Zeigen Sie, dass F genau dann ein lokaler Diffeomorphismus ist, wenn F eine Immersion und eine Submersion ist.
4. Bestimmen Sie für die folgenden glatten Mannigfaltigkeiten M und glatten Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils die Koordinatendarstellung von df in Bezug auf die angegebenen Koordinaten:
 - (a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ und $f(x, y) = x/(x^2 + y^2)$;
Standard kartesische Koordinaten (x, y) .
 - (b) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ und $f(x, y) = x/(x^2 + y^2)$;
Polarkoordinaten (r, θ) .
 - (c) $M = \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ und $f(p) = z$ -Koordinate von p ;
Stereographische Koordinaten.
5. Es sei M eine zusammenhängende glatte Mannigfaltigkeit und $\pi : \overline{M} \rightarrow M$ eine topologische Überlagerung. Zeigen Sie, dass es genau eine glatte Struktur auf \overline{M} gibt bezüglich der π eine glatte Überlagerung ist.
Hinweis: Verwenden Sie die Existenz glatter lokaler Schnitte.
6. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und S eine Teilmenge von M für die jeder Punkt $p \in S$ eine Umgebung $U \subseteq M$ besitzt, sodass $U \cap S$ eine eingebettete k -Untermannigfaltigkeit von U ist. Zeigen Sie, dass dann auch S eine eingebettete k -Untermannigfaltigkeit von M ist.
7. Es sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit mit Rand. Zeigen Sie, dass dann ∂M eine eingebettete $(n - 1)$ -Untermannigfaltigkeit (ohne Rand) von M ist.