4. Übungsblatt - Analysis auf Mannigfaltigkeiten - SS 2016

1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : N \to M$ eine Immersion. Dann gibt es zu jedem $p \in N$ eine Umgebung U von p in N, sodass $F|_U : U \to M$ eine glatte Einbettung ist.

   (b) Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $S \subseteq M$ eine immersierte Untermannigfaltigkeit. Jeder Punkt $p \in S$ ist im Bild einer lokalen Parametrisierung von S enthalten. Ist $X : U \to M$ eine beliebige lokale Parametrisierung von S, dann gibt es eine eindeutig bestimmte glatte Karte (V, φ) von S, sodass $X = \iota \circ \varphi^{-1}$, wobei $\iota : S \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung bezeichnet.

2. (a) Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $f \in C^\infty(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Dann ist $fY : M \to TM$, definiert durch

   $$(fY)_p = f(p)Y_p$$

   ein glattes Vektorfeld.

   (b) Es seien $M_1, \ldots, M_k$ glatte Mannigfaltigkeiten und für jedes $i = 1, \ldots, k$ bezeichne $\pi : M_1 \times \cdots \times M_k \to M_i$ die Projektion auf den i-ten Faktor. Zeigen Sie, dass es zu jedem $X \in \mathfrak{X}(M_i)$ ein glattes Vektorfeld auf $M_1 \times \cdots \times M_k$ gibt, welches π_i-verwandt ist mit X.

3. (a) Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung in Polarkoordinaten für das folgende Vektorfeld im $\mathbb{R}^2$:

   $$V = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

   (b) Berechnen Sie die Lie Klammer für das folgende Paar von Vektorfeldern im $\mathbb{R}^3$:

   $$V = y\frac{\partial}{\partial z} - 2xy^2\frac{\partial}{\partial y}, \qquad W = \frac{\partial}{\partial y}.$$

4. (a) Es sei $\pi : M \to N$ eine glatte Abbildung mit der Eigenschaft, dass jeder Punkt von M im Bild eines glatten lokalen Schnittes von π liegt. Zeigen Sie, dass π eine Submersion ist.

   (b) Es sei $\pi : M \to N$ eine Submersion und $X \in \mathfrak{X}(N)$. Zeigen Sie, dass es auf M ein glattes Vektorfeld gibt, das mit X π-verwandt ist. Ist dieses Vektorfeld dadurch eindeutig bestimmt?

5. Es seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten, $F : M \to N$ eine glatte Abbildung und $\omega \in \mathfrak{X}^*(N)$. Zeigen Sie, dass für jedes stückweise glatte Kurvensegment in M gilt

   $$\int_\gamma F^*\omega = \int_{F\circ\gamma} \omega.$$

6. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\pi : T^*M \to M$ die kanonische Projektion. Wir definieren ein Kovektorfeld α auf T^*M durch

$$\alpha_p(v) = \xi(d\pi(v)), \qquad v \in T_p(T^*M),\ p = (x, \xi),\ \xi \in T_x^*M.$$

Es seien $(U, x_1, \ldots, x_n)$ Koordinaten für M und $(T^*U, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ die zugehörigen Koordinaten für T^*M. Zeigen Sie, dass bezüglich dieser Koordinaten

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, dx_i$$

gilt.

7. Es seien M_1 und M_2 glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M_1 \to M_2$ ein Diffeomorphismus. Wir definieren eine Abbildung $F_\sharp : T^*M_1 \to T^*M_2$,

$$F_\sharp(x, \xi) = (F(x), ((dF)^*)^{-1}\xi)$$

wobei $(dF)^*$ die zu $dF : T_xM_1 \to T_{F(x)}M_2$ adjungierte lineare Abbildung bezeichnet.

Zeigen Sie:

(a) $F_\sharp : T^*M_1 \to T^*M_2$ ist glatt.

(b) $(G \circ F)_\sharp = G_\sharp \circ F_\sharp$ für Diffeomorphismen $F : M_1 \to M_2$ und $G : M_2 \to M_3$.

(c) $F_\sharp : T^*M_1 \to T^*M_2$ ist ein Diffeomorphismus.