

5. Übungsblatt - Analysis auf Mannigfaltigkeiten - SS 2016

1. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass die eingebetteten Untermannigfaltigkeiten der Kodimension 0 in M genau die offenen Untermannigfaltigkeiten sind.
2. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\theta : \mathcal{D} \rightarrow M$ ein glatter Fluss. Zeigen Sie, dass

$$p \mapsto V_p := \theta^{(p)'}(0)$$

ein glattes Vektorfeld V auf M definiert (den *infinitesimale Erzeuger* von θ) und dass jede Kurve $\theta^{(p)}$ eine Integrialkurve auf V ist.

3. Berechnen Sie den Fluss der folgenden Vektorfelder in \mathbb{R}^2 :

1. $V = y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$

2. $Y = y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$

4. Sei M eine glatte, kompakte Mannigfaltigkeit mit einem nirgends verschwindenden glatten Vektorfeld. Zeigen Sie, dass eine glatte Abbildung $F: M \rightarrow M$ existiert, die homotop zur identischen Abbildung ist, aber keine Fixpunkte hat.
5. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume. Angenommen $\bar{\pi} : V \times W \rightarrow Z$ ist eine bilineare Abbildung in einen Vektorraum Z mit der folgenden Eigenschaft: Zu jeder bilinearen Abbildung $A : V \times W \rightarrow Y$, gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\bar{A} : Z \rightarrow Y$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 V \times W & \xrightarrow{A} & Y \\
 \bar{\pi} \downarrow & \nearrow \bar{A} & \\
 Z & &
 \end{array}$$

Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $\Phi : V \otimes W \rightarrow Z$ mit $\bar{\pi} = \Phi \circ \pi$, wobei $\pi : V \times W \rightarrow V \otimes W$ die kanonische Projektion bezeichnet.

- (b) Ist V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum, dann ist der Raum $T^k(V^*)$ aller kovarianten k -Tensoren auf V kanonisch isomorph zum k -fachen Tensorprodukt $V^* \otimes \dots \otimes V^*$.
6. Beweisen Sie folgende Aussagen:

- (a) Das symmetrische Produkt ist kommutativ und bilinear.
- (b) Sind S, T kovariante 1-Tensoren, dann gilt

$$ST = \frac{1}{2}(S \otimes T + T \otimes S).$$

7. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und A eine geschlossene Teilmenge von M . Es sei weiters ω eine glatte Differentialform auf A , in dem Sinn, dass ω zu einer glatten Differentialform in der Umgebung jedes Punktes von A fortgesetzt werden kann. Zeigen Sie, dass es zu jeder offenen Menge U , die A enthält, eine glatte Differentialform $\bar{\omega} \in \Omega^k(M)$ gibt, sodass $\bar{\omega}|_A = \omega$ und $\text{supp } \bar{\omega} \subseteq U$.