

2. Übungsblatt - Analysis auf Mannigfaltigkeiten - WS 2018

1. Zeigen Sie:

- (a) Ist $F : M \rightarrow N$ glatt, so sind die Koordinatendarstellungen von F bezüglich jedem Paar glatter Karte (U, φ) und (V, ψ) von M bzw. N mit $F(U) \subseteq V$ glatt.
- (b) Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von M . Gibt es zu jedem $\alpha \in A$ eine glatte Abbildung $F_\alpha : U_\alpha \rightarrow N$, sodass $F_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = F_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ für alle $\alpha, \beta \in A$, dann gibt es eine eindeutig bestimmte glatte Abbildung $F : M \rightarrow N$ mit $F|_{U_\alpha} = F_\alpha$ für alle $\alpha \in A$.

2. (a) Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand. Zeigen Sie, dass die Eigenschaft Rand- bzw. innerer Punkt von M zu sein koordinatenunabhängig ist.

- (b) Zeigen Sie, dass die Inklusionsabbildung $\text{cl } \mathbb{B}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ glatt ist, wenn die abgeschlossene Einheitskugel $\text{cl } \mathbb{B}^n$ als Mannigfaltigkeit mit Rand angesehen wird.

3. Seien M_1, \dots, M_k, N glatte Mannigfaltigkeiten und $\pi_i : M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow M_i$ die Projektion auf den i -ten Faktor. Eine Abbildung $F : N \rightarrow M_1 \times \dots \times M_k$ ist genau dann glatt, wenn jede der Komponentenfunktionen $\pi_i \circ F : N \rightarrow M_i$ glatt ist.

4. Der n -dimensionale reelle projektive Raum $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ ist die Menge aller 1-dimensionalen linearen Unterräume des \mathbb{R}^{n+1} . Wir versehen $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ mit der Quotiententopologie die durch die Abbildung $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$, die $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ auf den von x aufgespannten Unterraum $[x]$ abbildet, bestimmt wird.

Für $i = 1, \dots, n+1$ sei $\bar{U}_i = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} : x^i \neq 0\}$ und $U_i = \pi(\bar{U}_i) \subseteq \mathbb{R}\mathbb{P}^n$. Wir definieren noch $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\varphi_i[x^1, \dots, x^{n+1}] = \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right).$$

Offenbar ist φ_i injektiv mit der Inversen

$$\varphi_i^{-1}(u^1, \dots, u^n) = [u^1, \dots, u^{i-1}, 1, u^i, \dots, u^n].$$

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ eine topologische n -Mannigfaltigkeit ist auf der die Karten (U_i, φ_i) , $1 \leq i \leq n+1$, einen glatten Atlas bilden.
- (b) Es sei $d \in \mathbb{Z}$ und $P : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$ eine glatte Abbildung mit der Eigenschaft, dass $P(\lambda x) = \lambda^d P(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\bar{P} : \mathbb{R}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^k$ definiert durch $\bar{P}[x] = [P(x)]$ glatt ist.

5. Es sei M eine topologische n -Mannigfaltigkeit. Eine *differenzierbare Struktur* \mathcal{D}_M auf M ist eine Familie von auf offenen Mengen von M definierten stetigen Funktionen, sodass

- Zu jedem $p \in M$ gibt es eine Umgebung U von p und einen Homöomorphismus $h : U \rightarrow U' \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass für jede offene Menge $V \subseteq U$ gilt $f : V \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{D}_M$ genau dann, wenn $f \circ h^{-1} \in C^\infty(h(V))$.
- Ist $U = \bigcup U_i$ mit U_i offen in M , dann ist $f : U \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{D}_M$ genau dann, wenn $f|_{U_i} \in \mathcal{D}_M$ für jedes i .

Eine stetige Funktion $F : (M, \mathcal{D}_M) \rightarrow (N, \mathcal{D}_N)$ heißt *differenzierbar*, wenn $f \circ F \in \mathcal{D}_M$ für jedes $f \in \mathcal{D}_N$.

Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte glatte Strukturen auf M und N gibt, sodass eine stetige Funktion $F : M \rightarrow N$ genau dann differenzierbar ist, wenn sie glatt ist.

6. Es sei M ein topologischer Raum mit der Eigenschaft, dass es zu jeder offenen Überdeckung \mathcal{X} von M eine untergeordnete Zerlegung der Eins gibt. Zeigen Sie, dass M parakompakt ist.

7. Es seien M, N, P glatte Mannigfaltigkeiten, $F : M \rightarrow N$ und $G : N \rightarrow P$ glatte Abbildungen und $p \in M$. Dann gelten folgende Aussagen:

1. $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ ist linear.
2. $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p : T_p M \rightarrow T_{G \circ F(p)} P$.
3. $d(\text{Id}_M)_p = \text{Id}_{T_p M} : T_p M \rightarrow T_p M$.
4. Ist F ein Diffeomorphismus, dann ist $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ ein Isomorphismus.
5. Ist M zusammenhängend und $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ die Nullabbildung für jedes $p \in M$, dann ist F konstant.

8. Es seien M_1, \dots, M_k glatte Mannigfaltigkeiten und $\pi_j : M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow M_j$ die Projektion auf den j -ten Faktor. Zeigen Sie, dass für jede Wahl von $p_i \in M_i$, $i = 1 \dots k$ die Abbildung

$$\alpha : T_{(p_1 \dots p_k)}(M_1 \times \dots \times M_k) \rightarrow T_{p_1} M_1 \oplus \dots \oplus T_{p_k} M_k$$

definiert durch

$$\alpha(X) = (d\pi_{1(p_1 \dots p_k)} X, \dots, d\pi_{k(p_1 \dots p_k)} X)$$

ein Isomorphismus ist.