3. Übungsblatt - Analysis auf Mannigfaltigkeiten - WS 2018

1. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Für jedes $p \in M$ bezeichne C_p^∞ die Algebra der Germs von glatten reellwertigen Funktionen an p und $\mathcal{D}_p$ sei der Vektorraum der Derivationen von C_p^∞ an p. Zeigen Sie, dass T_pM und $\mathcal{D}_p$ isomorph sind.

2. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Es bezeichne $\mathcal{C}_p$ die Menge aller glatten Kurven $\gamma : J \to M$ mit $0 \in J$ und $\gamma(0) = p$. Auf $\mathcal{C}_p$ sei weiters eine Äquivalenzrelation wie folgt definiert: $\gamma_1 \sim \gamma_2$, wenn $(f \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \gamma_2)'(0)$ für jede glatte reellwertige Funktion f, die in einer Umgebung von p definiert ist. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi : \mathcal{C}_p/\sim \to T_pM$, gegeben durch $\Phi[\gamma] = \gamma'(0)$, wohldefiniert und bijektiv ist.

3. Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \to N$ eine glatte Abbildung. Zeigen Sie, dass F genau dann ein lokaler Diffeomorphismus ist, wenn F eine Immersion und eine Submersion ist.

4. Bestimmen Sie für die folgenden glatten Mannigfaltigkeiten M und glatten Funktionen $f : M \to N$ jeweils die Koordinatendarstellung von $\mathrm{d}f$ in Bezug auf die angegebenen Koordinaten:

    1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ und $f(x, y) = x/(x^2 + y^2)$ Standard kartesische Koordinaten (x, y).
    2. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ und $f(x, y) = x/(x^2 + y^2)$ Polarkoordinaten r, θ.
    3. $M = \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ und $f(p) = z$-Koordinate von p; Stereographische Koordinaten.

5. Es sei M eine zusammenhängende glatte Mannigfaltigkeit und $\pi : \overline{M} \to M$ eine topologische Überlagerung. Zeigen Sie, dass es genau eine glatte Struktur auf $\overline{M}$ gibt bezüglich der π eine glatte Überlagerung ist.

    Hinweis: Verwenden Sie die Existenz glatter lokaler Schnitte.

6. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und S eine Teilmenge von M für die jeder Punkt $p \in S$ eine Umgebung $U \subseteq M$ besitzt, sodass $U \bigcap S$ eine eingebettete k-Untermannigfaltigkeit von U ist. Zeigen Sie, dass dann auch S eine eingebettete k-Untermannigfaltigkeit von M ist.

7. Es sei M eine glatte n-Mannigfaltigkeit mit Rand. Zeigen Sie, dass dann ∂M eine eingebettete $n-1$-Untermannigfaltigkeit (ohne Rand) von M ist.