5. Übungsblatt - Analysis auf Mannigfaltigkeiten - WS 2018

1. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass die eingebetteten Untermannigfaltigkeiten der Kodimension 0 in M genau die offenen Untermannigfaltigkeiten sind.

2. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times M$ offen (insbesondere eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R} \times M$) und $\theta : \mathcal{D} \to M$ ein glatter Fluss. Zeigen Sie, dass

$$p \mapsto V_p := \theta^{(p)\prime}(0)$$

ein glattes Vektorfeld V auf M definiert (den *infinitesimalen Erzeuger* von θ) und dass jede Kurve $\theta^{(p)}$ eine Integralkurve auf V ist.

3. Berechnen Sie den Fluss der folgenden Vektorfelder in $\mathbb{R}^2$:

   1. $V = y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$
   2. $Y = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$

4. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume. Angenommen $\overline{\pi} : V \times W \to Z$ ist eine bilineare Abbildung in einen Vektorraum Z mit der folgenden Eigenschaft: Zu jeder bilinearen Abbildung $A : V \times W \to Y$, gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\overline{A} : Z \to Y$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\overline{\pi}"'] & Y \\ Z \arrow[ur, "\overline{A}"'] & \end{tikzcd}$$

   Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $\Phi : V \otimes W \to Z$ mit $\overline{\pi} = \Phi \circ \pi$, wobei $\pi : V \times W \to V \otimes W$ die kanonische Projektion bezeichnet.

   (b) Ist V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum, dann ist der Raum $T^k(V)$ aller kovarianten k-Tensoren auf V kanonisch isomorph zum k-fachen Tensorprodukt $V^* \otimes \cdots \otimes V^*$.

5. Beweisen Sie folgende Aussagen:

   (a) Das symmetrische Produkt ist kommutativ und multilinear.

   (b) Sind S, T kovariante 1-Tensoren, dann gilt

$$ST = \frac{1}{2}(S \otimes T + T \otimes S).$$

6. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und A eine geschlossene Teilmenge von M. Es sei weiters ω eine glatte Differentialform auf A, in dem Sinn, dass ω zu einer glatten Differentialform in der Umgebung jedes Punktes von A fortgesetzt werden kann. Zeigen Sie, dass es zu jeder offenen Menge U, die A enthält, eine glatte Differentialform $\overline{\omega} \in \Omega^k(M)$ gibt, sodass $\overline{\omega}|_A = \omega$ und $\operatorname{supp} \overline{\omega} \subseteq U$.

7. Es sei M eine glatte n-Mannigfaltigkeit, $\{E_i\}$ ein glatter lokaler Frame für M und $\{\varepsilon^i\}$ der dazu duale Koframe. Es seien c^i_{jk}, $i = 1, \dots n$, die Komponentenfunktionen der Lie Klammer $[E_j, E_k]$ dieses Frames, also

$$[E_j, E_k] = \sum_i c^i_{jk} E_i.$$

Dann ist die äußere Ableitung jeder 1-Form ε^i gegeben durch

$$d\varepsilon^i = -\sum_{j,k} c^i_{jk} \varepsilon^j \wedge \varepsilon^k.$$