Mathematik 1 für BI

1. Blatt

WS 2014/2015

1. Entscheiden Sie, welche der folgenden Rechenregeln allgemein gültig sind:

   $$a^b+c^b=(a+c)^b,\quad a^b\cdot a^c=a^{b+c},\quad a^{(b^c)}=a^{bc},\quad (a^b)^c=a^{bc},\quad a^b+a^{-b}=0,\quad a^b\cdot a^{-b}=0,\quad \frac{a^b}{a^{-b}}=a^{2b}.$$

   Die Exponenten können in dieser Aufgabe als ganze Zahlen angenommen werden.

   Im Falle der gültigen Rechenregeln, versuchen Sie bitte diese plausibel zu begründen. Im Fall der ungültigen Rechenregeln bringen Sie ein Gegenbeispiel!

2. Schätzen Sie jeweils ab, wieviele Stellen die dargestellte Zahl in Dezimaldarstellung hat:

   $$\frac{10^{(2^3)}10^{-5}10^4}{100^{3/2}(10^{-3})^2},\quad \frac{2^{(2^3)}10^{-5}5^4}{100^{3/2}(30^{-3})^2},\quad \frac{2^{(2^4)}10^{-5}10^4}{10000^{-2/5}(2^{-3})^2}$$

   Erklären Sie dabei jeweils auch die von Ihnen verwendeten Rechenregeln für Exponentiation!

   Hinweis: $2^{10}=1024\approx 10^3$

3. Auf der Menge der natürlichen Zahlen gibt es bekanntlich die Teilbarkeitsrelation: wir schreiben $n|m$ wenn die natürliche Zahl $n\in\{1,2,3,\ldots\}$ die natürliche Zahl m teilt, wenn es also eine natürliche Zahl k gibt mit $m=nk$. Begründen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) $n|m$ genau dann, wenn der Bruch $\frac{m}{n}$ ebenfalls in $\mathbb{N}$ liegt.

   (b) zu jeder natürlichen Zahl gibt es mindestens einen Teiler

   (c) wenn $n|m$ gilt, dann gilt auch $n|(m^2)$

   (d) wenn $2|(n\cdot m)$, dann $2|n$ oder $2|m$.

4. Schreiben Sie die Aussagen (a)-(d) von Aufgabe 3 als Formeln, d.h. mit Quantoren und Implikationen.

5. Finden Sie die Negationen der Aussagen (a)-(d) von Aufgabe 3 zuerst in Alltagssprache und dann als mathematische Formeln.

   Achtung: Da die Aussagen von Aufgabe 3 wahr sind, sind ihre Negationen falsch. In dieser Aufgabe sollen Sie diese (falschen Aussagen) natürlich nicht beweisen, sondern lediglich formulieren!

6. Viele aus der Schul-Mathematik bekannte Verknüpfungen/Operationen sind assoziativ, d.h. $a\star(b\star c) = (a \star b) \star c$. Dabei bezeichnet $\star$ die fragliche Verknüpfung. Eine weitere interessante Eigenschaft von Verknüpfungen ist die Kommutativität, d.h. die Gültigkeit von $a \star b = b \star a$. Untersuchen Sie folgende Beispiele auf Assoziativität und Kommutativität:

   (a) Exponentiation $a \star b := a^b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$
   (b) Größter gemeinsamer Teiler $a \star b := ggT(a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{N}$
   (c) Kreuzprodukt $\vec{a} \star \vec{b} := \vec{a} \times \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, für Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

   Geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel an, falls eine Eigenschaft verletzt ist.

   Hinweis: Das Kreuzprodukt von zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ ist bekanntlich definiert als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{pmatrix}.$$

7. Bekanntlich gilt für zwei reelle Zahlen $x > y$ (x ist größer als y) genau dann, wenn die Differenz $x - y > 0$, also positiv ist. Zeigen Sie mit dieser Definition (Differenz ist positiv), dass für $x, y \neq 0$ folgende Aussage gilt:

$$x > y \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$$

   Hinweis: Fallunterscheidungen hinsichtlich der Vorzeichen von x und y können hilfreich sein. Ebenso die Umformung $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = (x - y)\frac{1}{xy}$.

8. Wählen Sie ein konkretes $x \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$. Zeichnen Sie die Menge

$$\{y \in \mathbb{R} : |y - x| < \varepsilon\}$$

   auf der Zahlengeraden ein. Folgern Sie sodann dass für beliebige (aber feste) Werte $x \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$

$$z \in \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < \varepsilon\} \Leftrightarrow z \in (x + \varepsilon, x - \varepsilon).$$

9. Wählen Sie ein konkretes $a \in \mathbb{R}$ und zeichnen Sie die Mengen

$$\{x \in \mathbb{R} : x < a\} \quad \text{und} \quad \{x \in \mathbb{R} : x^2 < a^2\}$$

   Unter welchen Voraussetzungen ist eine der beiden Mengen in der anderen enthalten? Wie lautet gegebenenfalls diese Inklusion?

10. Wählen Sie konkret drei paarweise verschiedene unendliche Mengen $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ und bestimmen Sie:

$$A \cap B, \quad A \cap C, \quad A \cup B \cup C, \quad A \cap (B \cup C), \quad \mathbb{R} \setminus B, \quad A \setminus C, \quad (C \cap (A \cup B)) \setminus A, \quad ((A \setminus B) \cap C) \cup A.$$