Mathematatik 1 für BI

6. Blatt

WS 2014/2015

51. Untersuchen Sie nachstehende Funktionen auf Monotonie und Umkehrbarkeit und skizzieren Sie den Funktionsgraphen! Geben Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion (samt ihrem Definitions- und Wertebereich) an!

    (a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

    (b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$

    (c) $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ -1 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$

    (d) $f(x) = 1$

    (e) $f(x) = |x|$

    (f) $f(x) = x$

52. (a) Erklären Sie wann eine Funktion $f(x)$ *gerade* ist und bringen Sie drei Beispiele. Welche Aussage über gerade Funktionen ist korrekt?
    Wenn f gerade ist, dann ist f ☐ immer, ☐ nie, ☐ manchmal umkehrbar.

    (b) Erklären Sie wann eine Funktion $f(x)$ *ungerade* ist und bringen Sie drei Beispiele. Welche Aussage über umkehrbare und ungerade Funktionen ist korrekt?
    Wenn f ungerade ist, dann ist f^{-1} ☐ immer, ☐ nie, ☐ manchmal ungerade.

    (c) Erklären Sie wann eine Funktion $f(x)$ *periodisch* ist und bringen Sie drei Beispiele.
    Welche Aussage über periodische Funktionen ist korrekt?
    Wenn f perodisch ist, dann ist f ☐ immer, ☐ nie, ☐ manchmal umkehrbar.

    Begründen Sie Ihre Antworten!

53. Schreiben Sie die $\varepsilon - \delta$ Charakterisierung der Stetigkeit als Formel an. Finden Sie die Formel für deren Negation und geben Sie diese in Alltagssprache wieder!

54. Zeigen Sie anhand der Definiton der Stetigkeit, dass $f(x) = 3x^2$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist. Geben Sie sich ein konkretes $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ vor und berechnen Sie ein passendes δ, sodass die $\varepsilon - \delta$ Charakteriserung der Stetigkeit an x_0 erfüllt ist.

55. Existieren folgende Grenzwerte? Begründen Sie Ihre Antworten anhand der Definition des Grenzwerts für Funktionen!

    (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

    (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sgn}(x)+1)$, $\quad \lim\limits_{x\to 0^-} (\operatorname{sgn}(x)+1)$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{sgn}(x)+1)$.

    (c) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x+1)$.

    (d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$, $\quad \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$.

56. Skizzieren Sie die Graphen folgender reeller Funktionen und argumentieren Sie anhand der Definition der Stetigkeit, wo diese Funktionen stetig bzw. unstetig sind!

    (a) $f(x) = \operatorname{sgn}\big(x(x-1)(x+1)\big)$

    (b) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für} \quad x < 1, \\ 2 & \text{für} \quad x = 1, \\ 3 - e^{1-x} & \text{für} \quad x > 1. \end{cases}$

    (c) $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x} & \text{für} \quad |x| < 1, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$

57. Wählen Sie ein $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + \alpha}{x - 3}$$

    auf ganz $\mathbb{R}$ stetig fortsetzbar ist und begründen Sie Ihre Vorgehensweise!

58. Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to Y$ stetig und surjektiv. Zeigen Sie, dass der Satz der Vorlesung (stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt) falsch wird, wenn man Kompaktheit durch Beschränktheit oder durch Abgeschlossenheit ersetzt, indem Sie Beispiele angeben mit:

    (a) X ist beschränkt, Y unbeschränkt.

    (b) X ist abgeschlossen, Y nicht.

    Zur Erinnerung: Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}$ heißt *kompakt*, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

59. Führen Sie durch schrittweises Zerlegen der Funktion f in Ihre elementaren Bestandteile die Stetigkeit von f auf die Stetigkeit der Exponentialfunktion ($x \mapsto e^x$) und auf die Stetigkeit der identischen Abbildung ($x \mapsto x$) zurück! Geben Sie einen möglichst großen Definitionsbereich für f an!

$$f(x) = \frac{|\ln(x^2+4)|}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\Big((\ln(x) + e^x)^2\Big).$$

60. Geben Sie jeweils eine Funktion f mit nachstehender Eigenschaft an. Können Sie jeweils auch eine *stetige* solche Funktion f finden?

    (a) f nimmt auf $[0, \infty)$ kein Minimum, aber ein Maximum an.

    (b) f nimmt auf $[0, \infty)$ weder Minimum noch Maximum an.

    (c) f nimmt auf $\mathbb{R}$ ein Minimum, aber kein Maximum an.

    (d) f nimmt auf $\mathbb{R}$ weder Minimum noch Maximum an.

    (e) f nimmt auf $[0, 1,]$ weder Minimum noch Maximum an.