1. Übungsblatt – UE 104.289 Mathematik – Sommersemester 2015

1. (a) Lesen Sie im Skript folgende Begriffe nach: logisches 'und' ($\wedge$), logisches 'oder' ($\vee$), Implikation ($\Rightarrow$), Äquivalenz ($\Leftrightarrow$), Negation ($\neg$), Allquantor ($\forall$) und Existenzquantor ($\exists$).

   (b) $\mathbf{A}(x)$ stehe für die Aussage "x kann rechnen" und $\mathbf{B}(x)$ für die Aussage "x kann denken". Schreiben Sie mittels aussagenlogischer Formeln:

      i. Der F. kann entweder nicht rechnen oder nicht denken. Vielleicht kann er auch nichts davon.
      ii. Wer denken kann, kann auch rechnen.
      iii. Ich kenne jemanden, der kann zwar nicht rechnen, dafür aber denken.
      iv. Es ist nicht so, dass der F. wenn er rechnen könnte auch denken könnte.

2. (a) Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ genau dann gilt, wenn $\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ gilt.

   (b) Drücken Sie die Negation von $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ möglichst einfach aus.

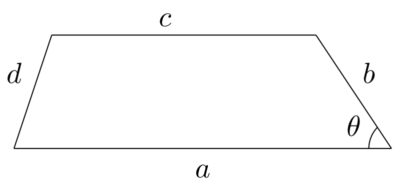
   (c) Drücken Sie die Negation von $\mathbf{A} \Rightarrow \neg\mathbf{B}$ möglichst einfach aus.

3. Geben Sie jeweils eine beliebige hinreichende aber nicht notwendige sowie eine beliebige notwendige aber nicht hinreichende Bedingung für folgende Sachverhalte an:

   (a) Mein Konto ist leer.

   (b) Die Zahl x ist positiv und kleiner als $\sqrt{2}$.

   (c) Das Trapez mit den Seitenlängen a, b, c, d und von a und b eingeschlossenem Winkel θ ist ein Rechteck.



4. Für den Beweis mittels vollständiger Induktion sind zwingend beide Schritte (Induktionsanfang, Induktionsschritt) notwendig:

   (a) Zeigen Sie, dass der Induktionsschritt für den Nachweis der falschen Behauptung $1^n = 0$ beweisbar ist.

   (b) Geben Sie eine falsche Behauptung an, für die der Induktionsanfang funktioniert, aber der Induktionsschritt fehlschlägt.

5. Zeigen Sie durch vollständige Induktion für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, dass $n(n^4 - 1)$ durch 5 teilbar ist.

6. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2 - k) = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

gilt.

7. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{4n}{3} - 1 \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}$$

gilt.

8. Sei k eine beliebige natürlich Zahl. Zeigen Sie, dass für alle $n \geq n_o$ (bestimmen Sie ein $n_o \in \mathbb{N}$!)

$$n! \geq 2^{n+1}$$

gilt.