1. Übungsblatt – UE 104.289 Mathematik – Sommersemester 2018

1. (a) Der Buchstabe A stehe für die Aussage „Er ist jung“und der Buchstabe B für die Aussage „Er ist schnell“. Schreiben Sie mittels aussagenlogischer Formeln:
   i. Er ist jung und langsam.
   ii. Es stimmt nicht, dass er jung und schnell ist.
   iii. Wenn er langsam ist, so ist er jung.

   (b) i. Beweisen Sie dass die Aussagen $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$, $\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ und $\neg\mathbf{B} \Rightarrow \neg\mathbf{A}$ equivalent sind.
   ii. Drücken Sie die Negation von $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ möglichst einfach aus.
   iii. Drücken Sie die Negation von $\mathbf{A} \Rightarrow \neg\mathbf{B}$ möglichst einfach aus.

2. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie!
   (a) $\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{N} : x < y$
   (b) $\exists x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{N} : x < y$
   (c) $\forall x \in \mathbb{Q}\ \forall y \in \mathbb{N} : x \geq y$
   (d) $\forall x \in \mathbb{Q}\ \exists y \in \mathbb{N} : y < x$

3. Für ein Verbrechen gibt es drei Verdächtige **A, B, C**. Finden Sie heraus, wer die Tat begangen hat. Begründen Sie Ihre Antwort!
   (i) Wenn **C** unschuldig, so sind **A** und **B** die Täter.
   (ii) Wenn **A** oder **B** schuldig ist, so ist **C** unschuldig.
   (iii) Wenn **C** unschuldig ist, so ist **B** auch unschuldig.

4. Zeigen Sie, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist, d.h., dass es keine natürlichen Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ gibt mit $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.
   Hinweis: Nehmen Sie an, dass der Bruch $\frac{m}{n}$ vollständig gekürzt ist.

5. Für den Beweis mittels vollständiger Induktion sind zwingend beide Schritte (Induktionsanfang, Induktionsschritt) notwendig:
   (a) Zeigen Sie, dass der Induktionsschritt für die falsche Behauptung $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$ durchführbar ist.
   (b) Finden Sie eine falsche Behauptung, für die der Induktionsanfang wahr ist.

6. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion folgende Aussage: $n^3 + 5n$ ist durch 6 teilbar.

7. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

8. Für eine Menge A ist die Potenzmenge von A definiert als
$$\mathcal{P}(A) = \{M \text{ Menge} | M \subseteq A\} \quad ,$$
   also als die Menge aller Teilmengen von A. Zum Beispiel ist für $A = \{1, 2\}$
$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \quad .$$
   Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgendes gilt:
   Ist $|A| = n$, so gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.