1. Übungsblatt - Mathematik 1 für BI

Sommersemester 2019

1. Drei Personen *Blue*, *White* und *Black* machen die folgenden Aussagen:

   Blue sagt „White und Black sagen die Wahrheit."

   White sagt „Blue sagt die Wahrheit."

   Black sagt „Blue lügt und White sagt die Wahrheit."

   Finden Sie mittels Aussagenlogik heraus, wer lügt und wer die Wahrheit sagt.

2. Begründen Sie, warum die folgenden zusammengesetzten Aussagen Tautologien sind, d.h. immer wahr, unabhängig davon, welche Wahrheitswerte die vorkommenden Einzelaussagen A, B, C haben.

   (a) $\neg(A \wedge \neg A)$ (Satz vom Widerspruch)

   (b) $A \vee \neg A$ (tertium non datur)

   (c) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$ (Umschreibung der Implikation)

   (d) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ (Umschreibung der Äquivalenz)

   (e) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (Kontraposition)

   (f) $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (erstes Distributivgesetz)

   (g) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ (erste de Morgan'sche Regel)

   (h) $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ (zweite de Morgan'sche Regel)

3. Überlegen Sie, welche der folgenden Formeln allgemeingültig sind, d.h. für alle Prädikate und Belegungen wahr sind und begründen Sie Ihre Antwort. Im negativen Fall bedeutet das das Finden eines Beispiels, d.h. die Angabe konkreter $A, B, x, y, \ldots$

   (a) $\neg(\forall x : \ A(x)) \ \leftrightarrow \ \exists x : \neg A(x)$

   (b) $(\exists x : A(x)) \vee (\exists x : B(x)) \leftrightarrow (\exists x : (A(x) \vee B(x)))$

   (c) $(\forall x : A(x)) \wedge (\forall x : B(x)) \leftrightarrow (\forall x : (A(x) \wedge B(x))$

   (d) $(\exists x : A(x)) \wedge (\exists x : B(x)) \leftrightarrow (\exists x : (A(x) \vee B(x)))$

   (e) $(\forall x \, \exists y : A(x, y)) \rightarrow (\forall y \, \exists x : A(x, y))$

   (f) $(\forall x \, \exists y : A(x, y)) \rightarrow (\exists y \, \forall x : A(x, y))$

   (g) $(\exists x \, \forall y : A(x, y)) \rightarrow (\forall y \, \exists x : A(x, y))$

4. Sind die folgenden Formeln wahr oder falsch? Geben Sie jeweils eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

   (a) $\exists x \in \mathbb{N} \, \exists y \in \mathbb{N} : \ x > y$

   (b) $\exists x \in \mathbb{N} \, \forall y \in \mathbb{N} : \ x > y$

   (c) $\forall x \in \mathbb{N} \, \exists y \in \mathbb{N} : \ x > y$

   (d) $\forall x \in \mathbb{N} \, \forall y \in \mathbb{N} : \ x > y$

5. Untersuchen Sie, ob die nachfolgenden Gleichungen für alle Mengen $A, B, C, \ldots$, A_i $(i \in I)$, B_j $(j \in J)$ gelten. Stets ist eine Begründung zu geben; lautet die Antwort *nein*, dann in Form eines Gegenbeispiels.

   (a) $A \cap B = B \cap A$

   (b) $A \setminus B = B \setminus A$

   (c) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

   (d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

   (e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   (f) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$

   (g) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in J}(A_i \cap B_j)$

   Hinweis: Oft lassen sich die Mengengleichungen in logische Beziehungen zwischen Aussagen der Form $x \in A$, $x \in B$ etc. umformulieren.

6. Durch welche der folgenden Vorschriften wird eine Funktion definiert? Falls eine Funktion vorliegt, entscheiden Sie, ob diese injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

   (a) f : {Studierende der TU Wien} $\to \mathbb{N}$ und $f(x)$ = Matrikelnummer von x.

   (b) f : {Studierende der TU Wien} $\to \{A, B, AB, 0\}$ und $f(x)$ = Blutgruppe von x.

   (c) f : {Einwohner von Österreich} $\to$ {Vornamen} und $f(x)$ = Vorname von x.

   (d) f : {Elemente des Periodensystems} $\to \mathbb{N}$ und $f(x)$ = Ordnungszahl von x.

   (e) f : {Elemente des Periodensystems} $\to \mathbb{N}$ und $f(x)$ = Massenzahl von x.

7. Sei $A = \{1, 2, 3\}$. Wie viele Abbildungen $f : A \to A$ gibt es? Welche davon sind injektiv, surjektiv, bijektiv? Geben Sie die Umkehrabbildungen $f^{(-1)}$ aller bijektiven $f : A \to A$ an.

8. Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ irgendwelche Abbildungen und $h := g \circ f$, also $h(a) := g(f(a))$. Zeigen Sie:

   (a) Sind f und g injektiv, so auch h.

   (b) Sind f und g surjektiv, so auch h.

   (c) Sind f und g bijektiv, so auch h.