Zusätzliche UE-Aufgaben zur Vorlesung „Algebra“, TU Wien, SS 2014.

Übungsaufgabe 1001. (Variante von UE2) Sei $(M, 0, \nu)$ eine beliebige Algebra vom Typ $(0, 1)$.
Dann gibt es genau einen Homomorphismus φ von den natürlichen Zahlen nach M; genauer: es gibt genau eine Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to M$, die

- die natürliche Zahl 0 auf 0 abbildet, und
- für alle Zahlen n den Nachfolger $\nu(n)$ auf den Nachfolger von $f(n)$ abbildet.

Beweisen Sie dies mit vollständiger Induktion, indem Sie dem Hinweis in Aufgabe 2 folgen. (Das Wort „Isomorphismus“ ist aber jetzt durch Homomorphismus zu ersetzen.)

Übungsaufgabe 1002. Wie viele Algebren vom Typ $(2, 1, 0)$ gibt es, die die Grundmenge $\{1, \ldots, n\}$ haben?

Übungsaufgabe 1003. Wie viele Isomorphieklassen von zweielementigen Algebren vom Typ $(1, 1)$ gibt es? (D.h.: Geben Sie möglichst viele paarweise nicht-isomorphe 2-elementige Algebren vom Typ $(1, 1)$ an.)

Übungsaufgabe 1004. Ein Körper mit Positivbereich ist ein Körper K mit einer Teilmenge P, die folgende Eigenschaften hat: P ist unter $+$ und $\cdot$ abgeschlossen, enthält 0, und für alle $x \in K \setminus \{0\}$ gilt genau eine der Aussagen $x \in P$, $-x \in P$. Zeigen Sie, dass in einem angeordneten Körper die Menge $\{x : x \geq 0\}$ ein Positivbereich ist. Zeigen Sie, dass ein Körper mit Positivbereich P durch die Definition $x \leq y :\Leftrightarrow y - x \in P$ zu einem angeordneten Körper wird.

Übungsaufgabe 1005. Finden Sie angeordnete Körper K_1, K_2, sodass es mindestens zwei verschiedene Körperisomorphismen $f, g : K_1 \to K_2$ gibt. (Hier ist nicht verlangt, dass f und g die Ordnung erhalten.)

Übungsaufgabe 1006. Sei $K = (K, +, 0, -, \cdot, 1)$ ein Körper. Zeigen Sie, dass K einfach ist (also nur die beiden trivialen Kongruenzrelationen zulässt).

Übungsaufgabe 1007. Sei G eine Gruppe, $g \in G$, $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $n \cdot g = 0$ genau dann, wenn n ein Vielfaches von $o(g)$ ist, d.h. wenn $o(g)|n$.

Übungsaufgabe 1008. Sei G endliche Gruppe, $|G| = n$. Dann gilt für alle $g \in G$: $o(g)|n$.

Übungsaufgabe 1009. Sei G abelsche Gruppe, und seien a und b Elemente von G. Dann gilt $o(a+b)$ teilt $kgV(o(a), o(b))$. Geben Sie ein Beispiel an, wo $o(a+b)$ echt kleiner als $kgV(o(a), o(b))$ ist.

Übungsaufgabe 1010. Sei $(G, \cdot, 1, ^{-1})$ eine Gruppe. Mit $Aut(G)$ bezeichnen wir die Menge aller Automorphismen von G (=aller Isomorphismen von G auf G). Die Menge $Aut(G)$ bildet (mit der Verknüpfungsoperation) selbst eine Gruppe. Für jedes Element $g \in G$ sei $\varphi_g : G \to G$ die durch $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$ definierte Abbildung.

1. Zeigen Sie: Für jedes g ist $\varphi_g \in Aut(G)$.

2. Zeigen Sie: Die Abbildung $\Phi : G \to Aut(G)$, die durch $\Phi(g) = \varphi_g$ definiert ist, ist ein Homomorphismus.

3. Zeigen Sie: $ker(\Phi) = \{ x \in G : \forall y \in G\ (xy = yx) \}$.

4. Berechnen Sie $ker(\Phi)$ für den Spezialfall $G = S_3$, die Gruppe aller Permutationen einer 3-elementigen Menge.

Übungsaufgabe 1011. Sei G eine Gruppe mit mehr als einem Element, $H := G \times G$. Finden Sie einen Automorphismus von H, der nicht in der Menge $\{ \varphi_h : h \in H \}$ liegt.

Übungsaufgabe 1012. Sei G_k die von $\frac{1}{2^k} + \mathbb{Z}$ erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. (Es gilt also $G_k \simeq C_{2^k}$.) Für $j \leq k$ definieren wir einen Homomorphismus $\iota_{j,k} : G_j \to G_k$ durch $\iota_{j,k}(q + \mathbb{Z}) = 2^{k-j}q + \mathbb{Z}$ für alle $q \in \mathbb{Q}$.

1. Zeigen Sie, dass die $\iota_{j,k}$ wohldefiniert sind und $\iota_{i,k} = \iota_{j,k} \circ \iota_{i,j}$ für alle $i \leq j \leq k$ erfüllen.

2. Beschreiben Sie den in der Vorlesung definierten „Limes" G_∞ dieser Folge von Gruppen. (Geben Sie an, ob er leer oder nichtleer, unendlich oder endlich, abzählbar oder überabzählbar ist, geben Sie typische Elemente oder — wenn möglich – eine explizite Aufzählung an, oder einen Isomorphismus zu einer wohlbekannten Gruppe; beschreiben Sie auch die Homomorphismen $\iota_{j,\infty} : G_j \to G_\infty$.)

Übungsaufgabe 1013. Wie die vorige, aber mit $\iota_{j,k}(q + \mathbb{Z}) = q + \mathbb{Z}$.

Übungsaufgabe 1014. Wie die vorige, aber mit $\iota_{j,k}(q + \mathbb{Z}) = 3^{k-j}q + \mathbb{Z}$.

Übungsaufgabe 1015. Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von Algebren, $F \in \mathcal{K}$, $E \subseteq F$.

(1) Sei F frei über E in $\mathcal{K}$. Sei $i : E \to F$ die Identität id_B. Dann ist F frei über (E, i).

(2) Sei $i : B \to F$ injektiv, $E := i(B)$. Dann ist F genau dann frei über (B, i) in $\mathcal{K}$, wenn F frei über E in $\mathcal{K}$ ist.

Übungsaufgabe 1016. Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von Algebren, die mindestens eine ALgebra mit mindestens 2 Elementen enthält. Sei $F \in \mathcal{K}$ frei über (B, i). Dann ist i injektiv.

Übungsaufgabe 1017. (1) Die Gruppe $\mathbb{Z}$ wird frei von 1 erzeugt (nicht beweisen). Folgern Sie, dass C_5 nicht frei von einem Element erzeugt wird.

(2) Sei $b \in C_5$. Zeigen Sie explizit, dass C_5 nicht von b erzeugt wird, indem Sie eine Gruppe G und eine Abbildung $j : \{b\} \to G$ angeben, die sich nicht zu einem Homomorphismus fortsetzen lässt.

Übungsaufgabe 1018. Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von Algebren, die unter Unteralgebren, Produkten und homomorphen Bildern abgeschlossen ist. Sei Γ die Menge aller Gesetze, die in allen Algebren $A \in \mathcal{K}$ gelten. Sei A eine beliebige Algebra, die alle Gesetze in Γ erfüllt. Sei $i : B \to A$ eine Bijektion, und sei $F \in \mathcal{K}$ frei über B.
Zeigen Sie $A \in \mathcal{K}$, indem Sie einen surjektiven Homomorphismus von F auf A angeben. Überlegen Sie insbesondere, warum die durch $\varphi(t^F(b_1, \ldots, b_k)) := t^A(i(b_1), \ldots, i(b_k))$ definierte Abbildung wohldefiniert ist, und warum sie Homomorphismus ist.

Übungsaufgabe 1019. Seien (A, f, g, h) und (A', f', g', h') Algebren vom Typ $(1, 1, 1)$, und seien A und A' disjunkt. Geben Sie ein Koprodukt von A und A' an. (D.h. eine Algebra (C, f_C, g_C, h_C) sowie Homomorphismen $i : A \to C$, $i' : A' \to C$, sodass (C, i, i') die universelle Eigenschaft eines Koprodukts hat.

Übungsaufgabe 1020. Sei $\mathcal{K}$ die Klasse aller Algebren (A, S, e) von Typ $(1, 0)$. Mit $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{Z}$ bezeichnen wir die Algebren $(\mathbb{N}, S, 0)$ bzw. $(\mathbb{Z}, S, 0)$, wobei S die Nachfolgerfunktion $x \mapsto x + 1$ auf $\mathbb{N}$ bzw $\mathbb{Z}$ sei.

(1) Geben Sie ein Koprodukt (in $\mathcal{K}$) von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ an.
Das heißt: Geben Sie eine Algebra (C, S_C) sowie zwei Homomorphismen

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "i_1"'] & C & \mathbb{N} \arrow[l, "i_2"] \end{tikzcd}$$

an, sodass für alle Algebren (D, S_D) und für alle Homomorphismen

$$\begin{tikzcd} & D & \\ \mathbb{N} \arrow[ur, "f_1"] & & \mathbb{N} \arrow[ul, "f_2"'] \end{tikzcd}$$

gilt:

Es gibt genau einen Homomorphismus $h : C \to D$, sodass $f_1 = h \circ i_1$, $f_2 = h \circ i_2$.

$$\begin{tikzcd} & D & \\ \mathbb{N} \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "i_1"'] & C \arrow[u, dotted, "h"] & \mathbb{N} \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[l, "i_2"] \end{tikzcd}$$

(2) Geben Sie ein Koprodukt (in $\mathcal{K}$) von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ an.

(3) Geben Sie ein Koprodukt (in $\mathcal{K}$) von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}$ an.

Übungsaufgabe 1021. Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von Algebren, die unter Unteralgebren abgeschlossen ist. Sei (C, i_1, i_2) Koprodukt von A_1 und A_2 in $\mathcal{K}$. Dann wird C von $\{i_1(x) : x \in A_1\} \cup \{i_2(y) : y \in A_2\}$ erzeugt.

Übungsaufgabe 1022. Sei R Integritätsbereich, $a \in R \setminus \{0\}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) Für alle $x, y \in R$ mit $xy = a$ gilt: $x \sim 1$ oder $x \sim a$.

(2) Für alle $x, y \in R$ mit $xy = a$ gilt: $x \sim 1$ oder $y \sim 1$.

(3) Für alle $x, y \in R$ mit $xy = a$ gilt: $x \sim a$ oder $y \sim a$.

Überlegen Sie, welche der von Ihnen bewiesenen Implikationen auch ohne die Voraussetzung der Nullteilerfreiheit von R gelten. (Vergessen Sie nicht, sich auf eine Definition von $a \sim b$ festzulegen.)

Übungsaufgabe 1023. Sei $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$. Finden Sie ein Element von R, das sich auf (mindestens) 2 verschiedene Arten als Produkt von irreduziblen Elementen darstellen lässt (wobei zwei Darstellungen als gleich zählen, wenn sie in einer geeigneten Reihenfolge jeder Faktor des ersten Produkts zum entsprechenden Faktor des zweiten assoziiert ist). Finden Sie ein Element, das irreduzibel aber nicht prim ist.

Übungsaufgabe 1024. Beweisen Sie 4.3.1.8, 4.3.1.9, 4.3.1.11a.

Übungsaufgabe 1025. Sei $\mathbb{Z}[x]$ der Ring der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. Dann ist $\mathbb{Z}[x]$ in $\mathcal{Rng}_1$ von x frei erzeugt. (Nicht beweisen.)
Sei $R \in \mathcal{Rng}_1$. Zeigen Sie, dass $R[x]$ (der Ring der Polynome mit Koeffizienten in R) das Koprodukt (in $\mathcal{Rng}_1$) von R und $\mathbb{Z}[x]$ ist.

Übungsaufgabe 1026. Sei R Integritätsbereich. Dann ist R genau dann ein euklidischer Ring, wenn es eine Funktion $G : R \to \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ mit folgender Eigenschaft gibt:

- $G(x) = -\infty$ genau dann, wenn $x = 0$.
- Für alle $a, b \in R$ mit $a \neq 0$ gibt es $q, r \in R$ mit $b = aq + r$ und $G(r) < G(a)$.

Übungsaufgabe 1027. Sei R ein Integritätsbereich, und sei $r \in R \setminus \{0\}$. Für jedes d gibt es höchstens ein x mit $xd = r$; wenn es so ein x gibt, nennen wir es $\frac{r}{d}$.
Wir schreiben $c \sim ggT(a, b)$ für: “$c|a$ und $c|b$ und: für alle c' mit $c'|a$, $c'|b$ gilt $c'|c$.” (Wenn es mindestens ein solches c gibt, dann schreiben wir “$ggT(a, b)$ existiert.”)

1. Wenn $ggT(ra, rb)$ existiert, dann auch $ggT(a, b)$.
2. Wenn $d \sim ggT(ra, rb)$, dann $r|d$, und $\frac{d}{r} \sim ggT(a, b)$.
3. Wenn $c \sim ggT(a, b)$ und $ggT(ra, rb)$ beide existieren, dann $rc \sim ggT(ra, rb)$.
4. Wenn R faktorieller Ring ist, dann gilt $ggT(ra, rb) \sim r \cdot ggT(a, b)$.

Übungsaufgabe 1028. Wir zeigen, dass $I[x]$ nur dann Hauptidealring ist, wenn I Körper ist.

1. Erster Beweis: Sei I ein Integritätsbereich aber kein Körper, und sei $a \in I \setminus \{0\}$ keine Einheit. Man zeige, dass die Menge $\{i + ra : i \in I, r \in R\}$ ein Ideal aber kein Hauptideal ist.

2. Zweiter Beweis: Sei $I[x]$ Hauptidealring. Zeigen Sie, dass das von x erzeugte Ideal (x) in $I[x]$ ein maximales Ideal ist, und dass $I[x]/(x)$ daher ein Körper ist. Folgern Sie daraus, dass I ein Körper ist.

Übungsaufgabe 1029. Sei R Ring, $E(R) := \{r \in R : r \sim 1\}$, K der Quotientenkörper von R. Für $k_1, k_2 \in K \setminus \{0\}$ definieren wir $k_1 \sim k_2 :\Leftrightarrow k_1/k_2 \in E(R)$.

- Seien $f_1(X), f_2(X) \in R[X]$, und seien $a_1, a_2 \in R \setminus \{0\}$.
  Aus $\frac{1}{a_1} f_1 = \frac{1}{a_2} f_2$ folgt $\frac{1}{a_1} C(f_1) \sim \frac{1}{a_2} C(f_2)$.

- Sei $f \in K[X]$, $f = \frac{1}{a_1} f_1$, $f_1 \in R[X]$, und $c \in K$, $c \sim \frac{1}{a_1} C(f_1)$. (D.h., c ist ein Inhalt von $f(X)$.)
  Dann gibt es ein primitives Polynom $\bar{f} \in R[X]$ mit $f = c\bar{f}$.

Übungsaufgabe 1030. Zeigen Sie: Sei $p(x) = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, und sei $\frac{r}{s}$ Nullstelle von p mit $r, s \in \mathbb{Z}$, $ggT(r, s) \sim 1$. Dann gilt $r|a_0$ und $s|a_n$.
Schließen Sie daraus, dass für $a \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $x^n = a$ in $\mathbb{Q}$ genau dann lösbar ist, wenn sie in $\mathbb{Z}$ lösbar ist.

Übungsaufgabe 1031. Sei K Körper, und sei $p(x) \in K[x]$ ein Polynom vom Grad n. Sei L der Zerfällungskörper von $p(x)$ über K. Zeigen Sie, dass $[L : K] \leq n!$ gelten muss.

Übungsaufgabe 1032. Sei $K = \{0, 1\}$ der 2-elementige Körper. Sei $p(x) = x^3 + x + 1 \in K[x]$. Zeigen Sie, dass $p(x)$ in $\mathbb{K}$ keine Nullstellen hat, und schließen Sie, dass $p(x)$ irreduzibel ist.
Sei L der Zerfällungskörper von $p(x)$ über $\mathbb{K}$. Zeigen Sie $[L : K] = 3$.
Hinweis: Sei $\alpha \in L$ eine beliebige Nullstelle von $p(x)$. Sei $\beta := \alpha^2$, $\gamma := \alpha^4$. Zeigen Sie, dass α, β, γ verschieden sind, und dass auch $p(\beta) = p(\gamma) = 0$ gilt; schließen Sie $L = L(\alpha, \beta, \gamma) = K(\alpha)$.