Programmieraufgabe II

Problemstellung

Gegeben: Triangulierung einer Fläche.

Gesucht: Gaußsche Krümmung dieser Fläche in den Dreieckspunkten.

Vorgangsweise

Eine diskrete Fläche wird gerne als Dreiecksvermaschung dargestellt. Ein Dreiecksnetz besteht aus Punkten (Knoten) $p_1, \ldots, p_n$ und Dreiecken $F_1, \ldots, F_k$, von denen jedes durch drei Knoten bestimmt ist und aus Kanten, von denen jede eine Seite eines der Dreiecke ist.

Sei eine Fläche gegeben als Bild einer Funktion, z.B.

$$f(u,v) = (\cos u(1+\beta\cos v), \sin u(1+\beta\cos v), \beta\sin v), \quad (u,v) \in (0,2\pi)\times(0,2\pi).$$

Trianguliert man das Parametergebiet regulär (d.h. man legt ein reguläres Gitter darüber mit Kantenlänge α und zieht Diagonalen in einer Richtung ein), so erhält man eine Dreiecksvermaschung indem man f auf diese Triangulierung anwendet.

Der Stern eines Knotens p einer Dreiecksvermaschung besteht aus allen Punkten, die mit p inzident sind.

Die diskrete Gaußkrümmung im Punkt p_i der Dreicksvermaschung ist nun definiert als

$$K_i := \frac{2\pi - \text{Winkelsumme im Knoten } p_i}{\text{area Stern}(p_i)/3}.$$

Berechnen sie die diskrete Gaußkrümmung der triangulierten Fläche. Vergleichen sie auch das Ergebnis mit der exakten Gaußkrümmung. Visualisieren sie diese Werte.

Motivieren sie diese Definition der diskreten Gaußkrümmung (Hinweis: Theorema elegantissimum von Gauß).

Zusatzaufgabe

Die diskrete mittlere Krümmung im Punkt p_i der Dreicksvermaschung ist definiert als

$$H_i := 3H_i/\text{area Stern}(p_i),$$

wobei

$$H_i := \frac{1}{2} \sum_{p_i q_j q_{j+1} \in \text{Stern}(p_i)} \cot\alpha_j(p_i q_{j+1}) + \cot\beta_j(p_i q_j).$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, die glatte mittlere Krümmung der Fl ache mit der diskreten mittleren Krümmung der Dreiecksvermaschung zu vergleichen. Veranschaulichen sie die Konvergenz für $\alpha \to 0$ gegen die glatte mittlere Krümmung in einem logarithmischen Diagramm. Anhand dieses Diagramms kann anschliessend die Konvergenzordnung abgelesen werden