Geometrie für Informatik

Übungsblatt 2

Aufgabe 1) Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ fest gewählt. Zeigen Sie dass die Menge

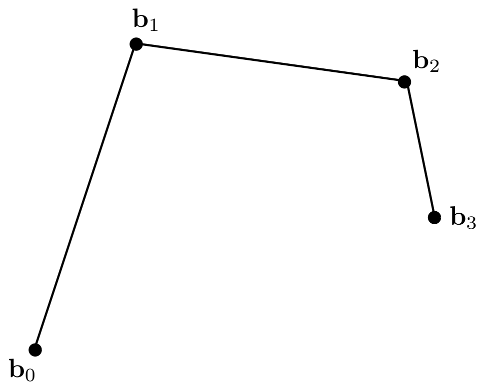
$$\mathbb{A} = \{a + \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

ein 2-dimensionaler affiner Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist. Wie berechnet man die Orthogonalprojektion von $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ auf diesen Unterraum?

Aufgabe 2)

(a) Beschreiben Sie den Algorithmus von de Casteljau.

(b) Konstruieren Sie für folgendes Kontrollpolygon den Kurvenpunkt mit Parameter $t = 2/3$ auf der zugehörgien Bezierkurve.



(c) Beschreiben Sie die Funktion $y = x^3 + 2$ zwischen den Punkten $x = -1$ und $x = 3$ durch eine Bezier-Kurve vom Grad 3, d.h., die Kontrollpunkte P_0, P_1, P_2, P_3 sind zu bestimmen.

(d) Eine Bezier-Kurve vom Grad n kann stets auch als Bezier-Kurve von beliebig höherem Grad dargestellt werden. Gegeben sei eine lineare Bezier-Kurve mit Kontrollpunkten P_0 und P_1. Bestimmen Sie Kon- trollpunkte Q_0, Q_1 und Q_2 einer quadratischen Bezierkurve $g(t)$, so dass $f(t) = g(t)$ für alle t.

(e) Stellen Sie genauso wie oben eine quadratische Kurve mit Kontrollpunkten P_0, P_1 und P_2 durch eine kubische mit Kontrollpunkten Q_0, Q_1, Q_2 und Q_3 dar.

Aufgabe 3)

(a) Gegeben ist die Matrix R einer Rotation. Wie bestimmt man die Achse der Rotation? Interpretiere das Ergebnis.

(b) Zu einer Punktmenge $(\mathbf{p}_i) \in \mathbb{R}^2$ soll eine Ausgleichsgerade bestimmt werden, also eine Funktion der Form

$$x \mapsto f_{k,d}(x) := (x, kx + d)$$

mit unbekannten Parametern $k, d \in \mathbb{R}$, die die Quadratdistanz zu der Punktmenke p_i minimiert. Wie lautet der entsprechende Ansatz und auf welches Problem führt das? Sei im speziellen $p_1 = (0, 1),\ p_2 = (1, 1),\ p_3 = (2, 1)$.

(c) Zu einer Punktmenge $(\mathbf{p}_i) \in \mathbb{R}^3$ soll im Raum ein Ausgleichsparaboloid bestimmt werden, also eine Funktion der Form

$$(x, y) \mapsto f_{a,b}(x, y) := (x, y, ax^2 + by^2)$$

mit unbekannten Parametern $a, b \in \mathbb{R}$, die die Quadratdistanz zu der Punktmenke p_i minimiert. Wie lautet der entsprechende Ansatz und auf welches Problem führt das? Sei im speziellen $p_1 = (0, 0, 0),\ p_2 = (6, 3, 1),\ p_3 = (4, 2, 0)$.

Aufgabe 4) Gegeben sind Punkte $\{x_1, \ldots, x_N\}$ und $\{y_1, \ldots, y_N\}$ in $\mathbb{R}^2$. Gesucht ist die affine Transformation $\Phi(x) = Ax + a$, $a \in \mathbb{R}^2$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die

$$\sum_{i=1}^{N} \|a + R(x_i) - y_i\|^2$$

minimiert.