

# Geometrie für Informatik

## Übungsblatt 3

**Aufgabe 1)**  $(\mathbf{p}_i) = (p_i^1, p_i^2, p_i^3) \in \mathbb{R}^3$  soll im Raum der Paraboloid bestimmt werden, also eine Funktion der Form

$$(x, y) \mapsto f_{a,b}(x, y) := (x, y, ax^2 + by^2)$$

mit unbekanntem Parametern  $a, b \in \mathbb{R}$ , der die Funktion

$$\sum_{i=1}^n (a(p_i^1)^2 + b(p_i^2)^2 - p_i^3)^2$$

minimiert. Beschreiben sie das zugehörige Minimierungsproblem. Sei im speziellen  $p_1 = (0, 0, 0)$ ,  $p_2 = (6, 3, 1)$ ,  $p_3 = (4, 2, 0)$ .

**Aufgabe 2)** Gegeben sind Punkte  $\{x_1, \dots, x_N\}$  und  $\{y_1, \dots, y_N\}$  in  $\mathbb{R}^2$ . Gesucht ist die affine Transformation  $\Phi(x) = Ax + a$ ,  $a \in \mathbb{R}^2$ ,  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  die

$$\sum_{i=1}^N \|a + A(x_i) - y_i\|^2$$

minimiert.

### Aufgabe 3)

- Sei  $SO(3)$  die Gruppe der orthogonalen Matrizen in  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Wieviele Freiheitsgrade hat diese Gruppe (d.h. welche Dimension besitzt der Raum  $SO(3)$ .)
- Bestimmen Sie die Rotationsmatrix  $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , welche eine Rotation um 45 Grad um den Vektor  $(1, 0, 1)^T$  beschreibt. (Wenn Sie entlang der Achse zum Ursprung blicken soll der Raum im Uhrzeigersinn rotiert werden.)

**Aufgabe 4) (inkl. Programmiereteil)** Gegeben sind Punkte

$$X = \{x_1, \dots, x_N\}, x_i \in \mathbb{R}^d,$$

$d$  gross. Gesucht ist ein  $k$ -dimensionaler Teilraum von  $\mathbb{R}^d$ , der die Daten approximiert. Beschreiben auf welches Minimierungsproblem diese Aufgabenstellung führt. Wie erkennt man wie gross  $k$  sein muss um die Daten gut zu "approximieren"? Welche Anwendung hat dieser Algorithmus in der Bildanalyse?

**Programmieraufgabe:** Schreiben Sie ein Matlab-Script für die Hauptkomponentenanalyse von gegebenen Daten.

**Input:** Datenvektor  $X = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{d \times N}$  und dimension des gesuchten Unterraums  $k$ .

**Output:** Basis des gesuchten  $k$ -dimensionalen Unterraums.

**Zusatzaufgabe:** Visualisieren Sie das Ergebnis für eine beliebige Punktmenge in  $\mathbb{R}^3$  und  $k = 1, k = 2$ .

**Abgabe bis 30.November als gezippte Datei per email. Arbeit in 2er-Gruppen ist erlaubt. Ihre Lösung ist mit einem Skript zu versehen, das die Funktion des Programms demonstriert.**