Geometrie für Informatik (104.319)

Übungsblatt 3
24. Oktober 2016

Aufgabe (1) Gegeben seien Punkte $\in \mathbb{R}^3$:

$$p_0 = (0,0,0),\ p_1 = (1,0,0),\ p_2 = (0,2,0),\ p_3 = (0,0,3).$$

(a) Zeigen Sie, dass die vier Punkte nicht in einer Ebene liegen, also die Ecken eines Tetraeders bilden.

(b) Bestimmen Sie die Gleichung für die Ebene S durch p_1, p_2, p_3.

(c) Projizieren Sie p_0 parallel zur Richtung $a = (1,1,1)$ auf die Ebene S.

Aufgabe (2) Bestimmen Sie eine affine Abbildung in $\mathbb{R}^3$, die die Punkte $p = (1,1,1)$ und $p' = (-1,-1,-1)$ vertauscht und den Punkt $a = (0,0,0)$ auf

(a) $a' = (0,0,0)$,

(b) $a' = (2,2,2)$

abbildet.

Aufgabe (3) Sei E eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ durch die Punkte

$$p_0 = (1,1,1),\ p_1 = (1,0,1),\ p_2 = (0,1,1)$$

und sei $\alpha\colon E \to \mathbb{R}^2$ eine affine Abbildung mit

$$f(p_0) = (0,0),\ f(p_1) = (1,0),\ f(p_2) = (0,1).$$

Bestimmen Sie alle $p \in E$ mit $f(p) = (1,1)$.

Aufgabe (4) Gegeben seien zwei Mengen von paarweise korrespondierenden Punkten $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Gesucht ist eine Transformation

$$\alpha(x) = a + Ax\,,$$

so dass die Summe:

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha(x_i) - y_i)^2$$

minimiert wird. Formulieren Sie den Ansatz wie diese Transformation berechnet werden kann und bestimmen sie die Nebenbedingungen so, dass α eine

(a) affine Abbildung,

(b) Ähnlichkeitsabbildung,

(c) Kongruenzabbildung

ist.

Aufgabe (5) Berechnen Sie die affine Transformation $\alpha(x)$ mit $a \in \mathbb{R}^2$ und $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ aus Aufgabe 4 mit Hilfe von MATLAB für die Punktmengen in $\mathbb{R}^2$:

$$X = [-1.0, -1.0; 1.0, -1.0; 1.0, 1.0; -1.0, 1.0]$$

$$Y = [1.0763, 2.1531; 3.1590, 2.0374; 3.0980, 4.0891; 1.1293, 4.1419]$$

Zusatzaufgabe (6) Können Sie für die Punktepaare aus Aufgabe 5 auch eine Ähnlichkeits- bzw. eine Kongruenzabbildung mit MATLAB berechnen?