Übungsblatt 2 für "Analyse von Algorithmen"

6.) Zeigen Sie die folgenden Identitäten für die harmonischen Zahlen.

(a)

$$H_n = \sum_{1 \le k \le n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

(b)

$$\sum_{1 \le k \le n} \frac{1}{k} H_k = \frac{1}{2} \left(H_n^2 + H_n^{(2)} \right).$$

7.) (a) Berechnen Sie

$$[z^n u^j] \frac{1}{(1-zu)(1-z)} \log \frac{1}{1-zu} \quad \text{und} \quad [z^n u^j] \frac{1}{(1-zu)(1-z)} \log \frac{1}{1-z}.$$

Anmerkung: für eine Potenzreihe $F(z) = \sum_{n \ge 0} F_n z^n$ bezeichnet $[z^n]F(z)$ den Koeffizienten von z^n in $F(z)$, also: $[z^n]F(z) = F_n$.

(b) Geben Sie einen geschlossenen Ausdruck für die folgende bivariate erzeugende Funktion an:

$$F(z,u) := \sum_{n \ge 1} \sum_{1 \le j \le n} H_n u^j z^n.$$

8.) Lösen Sie die Rekursion $na_n = (n-4)a_{n-1} + 12nH_n$, für $n \ge 5$, mit $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$.

9.) Zur Erzeugung sämtlicher Permutationen: Für die Anzahl der Vergleiche C_n zeige man die Rekursion

$$C_n = nC_{n-1} + \frac{(n-1)(3n-2)}{2}, \quad C_1 = 0,$$

und bestimme deren Lösung.

10.) Sei $a_1 \dots a_n$ eine Permutation von $\{1, \dots, n\}$ und sei $i < j$ und $a_i > a_j$. $a_1' \dots a_n'$ entstehe aus $a_1 \dots a_n$ durch Vertauschung von a_i und a_j. Kann $a_1' \dots a_n'$ mehr Inversionen haben als $a_1 \dots a_n$?