Übungsblatt 1 für Diskrete Methoden

1.) Bestimmen Sie mit Hilfe von erzeugenden Funktionen eine Summenformel für

$$\sum_{k=0}^{n}(k^2-k).$$

2.) Mit Hilfe von erzeugenden Funktionen und unter Zuhilfenahme der Binomialidentität

$$\binom{-r}{k} = (-1)^k \cdot \binom{r+k-1}{k}, \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \text{ und } r \in \mathbb{C}.$$

finden Sie eine Summenformel für

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k}, \quad \text{wobei } m, n \in \mathbb{N}.$$

3.) Sei $A(z)$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$. Wie können die erzeugenden Funktionen der Folgen

$$(0, a_1, 0, a_3, 0, a_5, 0, \dots) \quad \text{und} \quad (a_0, 0, 0, a_3, 0, 0, a_6, \dots)$$

mit Hilfe von $A(z)$ ausgedrückt werden? Weiters soll als Anwendung ein geschlossener Ausdruck für

$$\sum_{k\equiv 0 \pmod 3} \binom{n}{k}$$

angegeben werden.

4.) (a) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0} = \left(\binom{2n}{n}\right)_{n\geq 0}$.

(b) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion der Folge $(b_n)_{n\geq 0}$, für

$$b_n = \begin{cases} n^2+n, & \text{für } n \text{ gerade,} \\ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

5.) Auf wie viele Arten kann ein konvexes n-Eck durch Diagonalen in lauter Dreiecke zerlegt werden, wenn keine zwei Diagonalen einander überschneiden dürfen?

6.) Es sei $\mathcal{F}$ die Familie aller endlichen 0-1-Folgen, bei denen keine zwei Einser unmittelbar nebeneinander stehen. Das Gewicht jeder Folge sei ihre Länge. Wie kann $\mathcal{F}$ aus einfacheren Objekten konstruiert werden? Welcher Ausdruck ergibt sich für die erzeugende Funktion?