Übungsblatt 2 für Diskrete Methoden

7.) Zeigen Sie mit Hilfe von erzeugenden Funktionen: Die Anzahl der Partitionen von n in lauter verschiedene Summanden ist gleich der Anzahl der Partitionen von n in lauter ungerade Summanden.

8.) Zeigen Sie mit Hilfe von erzeugenden Funktionen: Die Anzahl der Kompositionen von n in lauter Summanden 1 oder 2 ist gleich der Anzahl der Kompositionen von $n+2$ in lauter Summanden größer gleich 2.

9.) Man betrachte die folgenden beiden Konvolutionen für erzeugende Funktionen:

$$(1+z)^r \cdot (1+z)^s = (1+z)^{r+s}, \quad \text{für } r, s, \in \mathbb{R},$$

$$\frac{z^r}{(1-z)^{r+1}} \cdot \frac{z^s}{(1-z)^{s+1}} = \frac{z^{r+s}}{(1-z)^{r+s+2}}, \quad \text{für } r, s \in \mathbb{N}.$$

Durch Koeffizientenvergleich beweise man nun die folgenden beiden Identitäten (mit $n \in \mathbb{N}$ und den oben angeführten Einschränkungen für r, s):

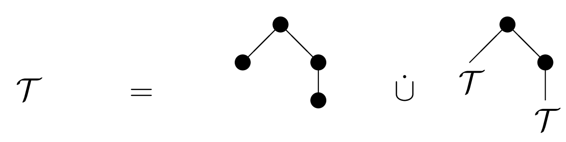
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{r}\binom{k}{s} = \binom{n+1}{r+s+1}.$$

10.) Sei $R = \mathrm{GF}(p)[x]$ der Polynomring mit Koeffizienten aus dem endlichen Körper $\mathrm{GF}(p)$, p Primzahl. Ein Polynom $P(x)$ vom Grad n heißt normiert, wenn der Koeffizient von x^n in $P(x)$ gleich 1 ist. Es sei als bekannt vorausgesetzt, daß jedes normierte Polynom eine eindeutige Darstellung als Produkt von irreduziblen normierten Polynomen besitzt. Sei a_n die Anzahl der irreduziblen normierten Polynome vom Grad n in R. Zeigen Sie:

(a) $\prod_{k\geq 1} (1 + z^k + z^{2k} + \cdots)^{a_k} = \sum_{n\geq 0} p^n z^n$,

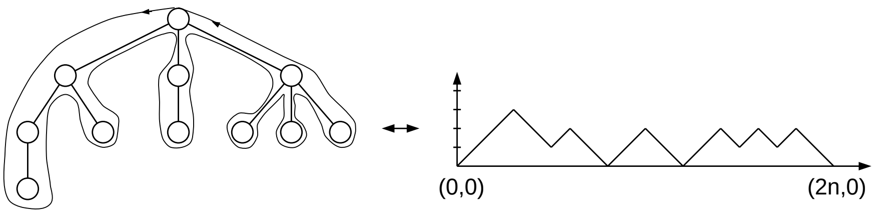
(b) $p^n = \sum_{d|n,\, d>0} d\, a_d$ (d.h. die Summe läuft über alle Teiler $d > 0$ von n).

11.) Bestimmen Sie die Anzahl t_n aller ebenen Wurzelbäume mit n Knoten, welche durch die folgende symbolische Gleichung erzeugt werden:



12.) Sei $\mathcal{P}_n$ die Familie der ebenen Wurzelbäume mit n Knoten. Sei weiters $\mathcal{G}_n$ die Familie der Gitterpunktpfade (also Pfade in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$), die bei $(0,0)$ starten, in $(2n, n)$ enden, die Pfade nie unterhalb die x-Achse gelangen und wobei nur Schritte "north east" $(1,1)$ und "south east" $(1,-1)$ verwendet werden.

(a) Sei $P \in \mathcal{P}_{n+1}$ ein ebener Wurzelbaum mit $n+1$ Knoten. Betrachten wir nun eine Baumtraversierung von P: wir starten bei der Wurzel und "gehen dann im Gegenuhrzeigersinn um den Baum herum" bis wir wieder beim Wurzelknoten landen. Etwas mathematischer formuliert: wir betrachten eine sogenannte Tiefensuche (depth first search) des Baums, bei der Wurzel startend und die Links-Rechts-Reihenfolge der Unterbäume der Knoten berücksichtigend. Dabei wird jeder Knoten des Baums besucht und dabei wird jede Kante genau zweimal verwendet, einmal in Richtung "weg von der Wurzel" und einmal in Richtung "hin zur Wurzel". Wir "codieren" nun diese Baumtraversierung als Gitterpunktpfad G: wir starten im Punkt $(0,0)$ und die Benützung einer Kante "weg von der Wurzel" entspricht einem Schritt "north east" $(1,1)$, wohingegen die Benützung einer Kante "hin zur Wurzel" für einen Schritt "south east" $(1,-1)$ steht. Man überlege sich nun, daß der Gitterpunktpfad G in der Familie $\mathcal{G}_n$ enthalten ist und weiter, daß tatsächlich jedem Element in $\mathcal{P}_{n+1}$ bijektiv ein Element in $\mathcal{G}_n$ entspricht. Für letztere Aussage zeige man insbesondere, wie man zu einem gegebenen Gitterpunktpfad $G \in \mathcal{G}_n$ den entsprechenden Wurzelbaum $P \in \mathcal{P}_{n+1}$ "wiedergewinnt".



(b) Um die Familie G_n (und somit auch $\mathcal{P}_{n+1}$) abzuzählen kann man das sogenannte André'sche Spiegelungsprinzip verwenden. Man benütze dabei, daß die Pfade von $(0,0)$ nach $(2n,0)$, die nie unter die x-Achse ("die guten Pfade") gelangen, abgezählt werden können, indem man alle Pfade, die von $(0,0)$ nach $(2n,0)$ gelangen zählt (was leicht geht!) und davon jene abzieht, die von $(0,0)$ nach $(2n,0)$ gehen, aber unter die x-Achse gelangen ("die bösen Pfade"). Um diese "bösen Pfade" abzuzählen, kann man wie folgt vorgehen: sei H ein böser Pfad und x_0 die x-Koordinate des ersten Gitterpunktes unterhalb der x-Achse (also $(x_0,-1)$ ist Element von H, aber es gibt keinen solchen Punkt links von x_0). Man erzeuge nun aus H einen einen Gitterpunktpfad H', indem man den Teilpfad in H von $(0,0)$ bis $(x_0,-1)$ unverändert läßt, aber den Teilpfad in H, der bei $(x_0,-1)$ startet und bei $(2n,0)$ endet, an der Achse $y=-1$ spiegelt. Wie man sofort sieht, erhält man einen Pfad H, der von $(0,0)$ nach $(2n,-2)$ geht. Man überlege sich, daß jedem "bösen Pfad" tatsächlich genau ein Pfad von $(0,0)$ nach $(2n,-2)$ entspricht und umgekehrt. Die Anzahl der Gitterpunktpfade von $(0,0)$ nach $(2n,-2)$ kann man wiederum leicht abzählen und man erhält mittels

$$\text{Anzahl der guten Pfade} = \text{Anzahl aller Pfade} - \text{Anzahl der bösen Pfade}$$

eine explizite Formel für $|G_n|$.