Übungsblatt 3 für Diskrete Methoden

13.) Die *Stirlingzahlen 2. Art* $S_{n,k}$, mit $n,k \geq 0$, werden durch die Beziehung

$$x^n = \sum_{k\geq 0} S_{n,k} x^{\underline{k}}$$

definiert ($x^{\underline{k}} := x(x-1)\cdots(x-k+1)$).

(a) Man zeige, daß die Stirlingzahlen 2. Art die folgende Rekursion erfüllen:

$$S_{n+1,k} = S_{n,k-1} + kS_{n,k}, \quad \text{für } n \geq 0, k \geq 1; \quad S_{n,0} = \delta_{n,0}, \quad S_{0,k} = \delta_{0,k}.$$

(b) Mit Hilfe dieser Rekursion zeigen Sie: $k!S_{n,k}$ ist die Anzahl aller surjektiven Abbildungen einer n-elementigen Menge auf eine k-elementige Menge.

14.) Die *Stirlingzahlen 1. Art* $s_{n,k}$, mit $n,k \geq 0$, werden durch die Beziehung

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k\geq 0} s_{n,k} x^k$$

definiert. Man zeige, daß die Stirlingzahlen 1. Art die folgende Rekursion erfüllen:

$$s_{n+1,k} = s_{n,k-1} - ns_{n,k}, \quad \text{für } n \geq 0, k \geq 1; \quad s_{n,0} = \delta_{n,0}, \quad s_{0,k} = \delta_{0,k}.$$

15.) Zeigen Sie mit Hilfe der vorigen Aufgabe: $|s_{n,k}| = (-1)^{n+k} s_{n,k}$ ist die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, deren kanonische Zyklenzerlegung aus genau k Zyklen besteht.

16.) Bestimmen Sie die exponentiell erzeugende Funktion für die Anzahl der Permutationen, in deren kanonischer Zyklenzerlegung nur Zyklen gerader Länge vorkommen und lesen Sie darin die entsprechenden Koeffizienten ab.

17.) Die *Bellzahlen* sind durch $B_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}$ definiert. Zeigen Sie die folgende Rekursion:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k, \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

18.) Wir betrachten die Familie $\hat{\mathcal{B}}$ der aufsteigend markierten Binärbäume: das sind Binärbäume (jeder interne Knoten besitzt kein oder ein linkes und/oder ein rechtes Kind), deren interne Knoten mit den Marken $\{1, 2, \ldots, n\}$ (mit n die Anzahl der internen Knoten des jeweiligen Baumes) versehen sind und wo gilt: jeder Kinderknoten besitzt eine größere Marke als der Elternknoten. Sei $\hat{B}_n := |\{B \in \hat{\mathcal{B}} : B$ besitzt n interne Knoten$|$. Sie sollen nun auf drei verschiedenen Arten zeigen, daß $\hat{B}_n = n!$ gilt, daß es also genau $n!$ aufsteigend markierte Binärbäume mit n internen Knoten gibt.

(a) Mit Hilfe des "box-products" gebe man eine symbolische Beschreibung der Familie $\hat{\mathcal{B}}$ an, welche man mittels exponentiell erzeugender Funktionen in eine Differentialgleichung überführt. Lösen der Differentialgleichung und Ablesen der Koeffizienten leistet das Gewünschte.

(b) Man gebe eine Bijektion zwischen aufsteigend markierten Binärbäumen und Permutationen (der selben Größe) an. Z.B. führe man eine "Inorder-Traversierung" (rekursive Baumtraversierung, wobei die Knoten in folgender Reihenfolge besucht werden: besuche linken Unterbaum - besuche Wurzel - besuche rechten Unterbaum) des Baumes durch und notiere die Marken der besuchten Knoten in einer Liste.

(c) Bechreibung als "Wachstumsprozess":

- Schritt 0: starte mit einem externen Knoten.
- Schritt $1 \leq j \leq n$: starte mit dem in Schritt $j-1$ generierten Binärbaum und ersetze einen externen Knoten durch einen internen Knoten mit Marke j mit zwei externen Knoten als Kindern.

Man überlege sich, daß man damit wirklich jeden aufsteigend markierten Binärbaum mit n internen Knoten genau einmal erhält. Diese letzte Beschreibung liefert auch eine einfache Möglichkeit, aufsteigend markierte Binärbäume zufällig zu erzeugen.