Übungsblatt 4 für Diskrete Methoden

19.) Lösen Sie die folgende Rekursion mittels erzeugender Funktionen:

$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} = 0, \quad \text{für } n \geq 3, \quad a_0 = 3, \ a_1 = a_2 = -1.$$

20.) Lösen Sie die folgende Rekursion mittels erzeugender Funktionen:

$$a_n = 2a_{n-1} + 2^{2n-2}, \quad \text{für } n \geq 1, \quad a_0 = 1.$$

21.) Lösen Sie das folgende System von Rekursionen mittels erzeugender Funktionen:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + 4b_n, \quad \text{für } n \geq 0, \\ b_{n+1} &= 3a_n + 3b_n, \quad \text{für } n \geq 0, \end{aligned}$$

mit Anfangswerten $a_0 = b_0 = 2013$.

22.) Lösen Sie die Rekursionen aus Bsp. 19.) und 20.) mit der Ansatzmethode.

23.) Lösen Sie die folgenden beiden Rekursionen mittels exponentiell erzeugender Funktionen:

$$\begin{array}{ll} (a) & a_n - 2na_{n-1} + n(n-1)a_{n-2} = 2n \cdot n!, \quad n \geq 2, \quad a_0 = a_1 = 1. \\ (b) & a_n - 2na_{n-1} + n(n-1)a_{n-2} = 2n, \quad n \geq 2, \quad a_0 = a_1 = 1. \end{array}$$

24.) Es sei $\hat{a}_n = \det A_n$, wobei $A_n = \left(a_{i,j}^{[n]}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ die folgende $n \times n$-Matrix ist:

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

d.h. die Einträge $a_{i,j}^{[n]}$ der Bandmatrix A_n sind gegeben durch

$$a_{i,j}^{[n]} = \begin{cases} 2, & \text{für } i = j, \\ 1, & \text{für } i = j+1 \text{ oder } j = i+1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Stellen Sie eine Rekursion für die gesuchten Zahlen $\hat{a}_n$ auf und lösen Sie diese.