Übungsblatt 5 für Diskrete Methoden

25.) Bezeichne $\mathcal{P}$ die in der Vorlesung bereits kennengelernten ebenen Wurzelbäume, welche die folgende formale Gleichung erfüllen:

$$\mathcal{P} = \{\bigcirc\} \times \mathcal{P}^*.$$

(a) Man bestimme nun mit Hilfe der Lagrange'schen Inversionsformel (nicht durch Auflösen der quadratischen Gleichung, wie in der Vorlesung durchgeführt) eine Formel für die Koeffizienten $P_n = [z^n]P(z)$.

(b) Es läßt sich zeigen (wird aber hier nicht verlangt), daß die mittlere Anzahl $b_{n,r}$ von Knoten im Abstand r zur Wurzel in einem ebenen Wurzelbaum mit n Knoten durch folgende Formel bestimmt ist:

$$b_{n,r} = \frac{1}{P_n}[z^n]\frac{z^r P(z)}{\big(1 - P(z)\big)^{2r}}.$$

Bestimmen Sie nun mit Hilfe der Lagrange'schen Inversionsformel eine geschlossene Formel für diese Anzahlen $b_{n,r}$.

26.) Bestimmen Sie die bivariate erzeugende Funktion für die Anzahl der Blätter in einem ebenen Wurzelbaum. Berechnen Sie mit Hilfe dieser Funktion die mittlere Anzahl der Blätter in einem ebenen Wurzelbaum mit n Knoten.

27.) Sei $\mathcal{T}$ die Familie der markierten Wurzelbäume. Analog dazu kann man markierte Wurzelwälder definieren, also markierte Graphen, deren Zusammenhangskomponenten markierte Wurzelbäume sind.

(a) Wenn wir die Familie $\mathcal{F}$ markierter Wurzelwälder betrachten, sind diese durch

$$\mathcal{F} = \mathcal{T}^{[*]}$$

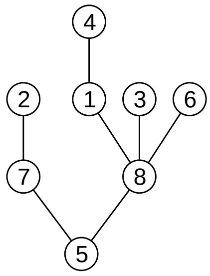
gegeben. Man bestimme mit Hilfe der Lagrange'schen Inversionsformel die Anzahl der markierten Wurzelwälder mit genau n Knoten.

(b) Betrachten wir nun die Familie $\mathcal{G}_m$ der markierten Wurzelwälder, die aus genau m Wurzelbäumen bestehen, welche also

$$\mathcal{G}_m = \frac{1}{m!}\mathcal{T}^m$$

erfüllt. Wiederum bestimme man mit Hilfe der Lagrange'schen Inversionsformel die Abzählformel für Objekte der Größe n.

28.) In der Vorlesung wurde mit Hilfe der Lagrange'schen Inversionsformel gezeigt, dass die Anzahl T_n der verschiedenen markierten Wurzelbäume mit genau n Knoten (also Bäume mit Knotenmenge $\{1, 2, \ldots, n\}$, wo ein Knoten als Wurzel ausgezeichnet ist und wo die Links-Rechts-Reihenfolge der Kinder eines Elternknotens irrelevant ist) gegeben ist durch $T_n = n^{n-1}$. Dieses Resultat kann man auch bijektiv mittels sogenannten Prüfer-Codes, wo jedem markierten Wurzelbaum mit n Knoten eine Folge $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, mit $a_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ für $1 \leq i \leq n-1$ zugeordnet wird, erhalten. Um den Code zu generieren, entfernt man ausgehend von einem Wurzelbaum T sukzessive Knoten und zwar im Schritt i das Blatt (= Knoten ohne Kinder) mit größtem label (unter allen Blättern) und merkt sich das **label des Elternknotens** als a_i. Beispielsweise ist der Prüfer-Code im nachfolgend angegebenen Wurzelbaum gegeben als $(8, 1, 8, 7, 5, 8, 5)$.



Um zu zeigen, daß eine Bijektion zwischen den markierten Wurzelbäumen mit n Knoten und den n^{n-1} Zahlenfolgen $\in \{1, 2, \ldots, n\}^{n-1}$ vorliegt, muß man sich noch überlegen, wie man von einer gegebenen Zahlenfolge $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, mit $a_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ für $1 \leq i \leq n-1$ den entsprechenden Wurzelbaum "zurückgewinnen" kann. Überlegen Sie sich, wie dies gelingt.
Hinweis: Klarerweise entsprechen die Elemente, welche nicht in der Zahlenfolge $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ vorkommen, den labels der Blätter im Baum. Man überlege sich weiter, daß, wenn ein label das letzte Mal in der Zahlenfolge auftritt, es dann zu einem Blatt geworden ist.

29.) Die sogenannte Abel-Polynome $(A_n(x))_{n\geq 0}$ sind definiert als Koeffizienten von e^{xt} bezüglich der Entwicklung in Potenzen von $\frac{t}{e^t}$, genauer:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{A_n(x)}{n!} \frac{t^n}{e^{nt}} = e^{tx}.$$

(a) Man zeige mit Hilfe der Substitution $z = \frac{t}{e^t}$ und Anwenden der Lagrange'schen Inversionsformel die geschlossene Darstellung:

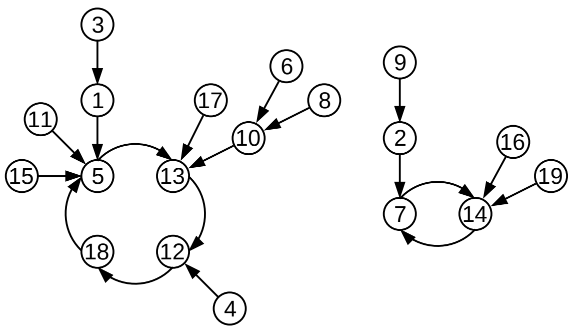
$$A_n(x) = x(x+n)^{n-1}.$$

(b) Man zeige, daß diese Polynome folgende Beziehung (in Analogie zum binomischen Lehrsatz) erfüllen:

$$A_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k(x) A_{n-k}(y).$$

30.) Betrachtet man den Abbildungsgraphen einer Abbildung $f : [n] \to [n]$, mit $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$, dann ist dieser definitionsgemäß ein gerichteter Graph, wo der Weggrad (= out-degree) $d^+(x) = 1$, für alle $x \in [n]$. Dadurch ergibt sich eine recht einfache Struktur dieser Graphen; nämlich kann man sich die (schwachen) Zusammenhangskomponenten als eine Folge markierter Wurzelbäume, deren Wurzelknoten zyklisch verbunden sind, denken. Beispielsweise ergibt sich für die Abbildung $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 7 & 1 & 12 & 13 & 10 & 14 & 10 & 2 & 13 & 5 & 18 & 12 & 7 & 5 & 14 & 13 & 5 & 14 \end{pmatrix}$

der Abbildungsgraph



Definieren wir mit $\mathcal{M} = \{f : [n] \to [n], n \geq 0\}$ die Familie aller sogenannten mappings, mit $\mathcal{C}$ die Menge aller mappings, wo der Abbildungsgraph (schwach) zusammenhängend ist, und mit $\mathcal{T}$ die Familie der markierten Wurzelbäume, dann erhalten wir folgende formale Beschreibung:

$$\mathcal{M} = \mathcal{C}^{[*]}, \qquad \mathcal{C} = \text{Cycle}(\mathcal{T}) = \mathcal{T} \ \dot{\cup} \ \frac{1}{2}\mathcal{T}^2 \ \dot{\cup} \ \frac{1}{3}\mathcal{T}^3 \ \dot{\cup} \ \frac{1}{4}\mathcal{T}^4 \ \dot{\cup} \ \ldots$$

Man zeige, daß für die entsprechenden erzeugenden Funktionen der Zusammenhang

$$M(z) = \frac{1}{1 - T(z)}$$

gilt und man zeige weiters mit Hilfe des formalen Residuenkalküls, daß tatsächlich

$$n![z^n]M(z) = n^n$$

gilt (was natürlich aufgrund der kombinatorischen Interpretation klar ist).