Übungsblatt 6 für Diskrete Methoden

31.) Die *Bernoullizahlen* werden durch ihre exponentiell erzeugende Funktion definiert:

$$\sum_{n\geq 0} B_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1}.$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe dieser Definition, daß gilt:

$$\tanh z = \sum_{m\geq 1} B_{2m} 2^{2m}(2^{2m} - 1)\frac{z^{2m-1}}{(2m)!}.$$

(b) Ermitteln Sie mit Hilfe der bekannten Beziehungen zwischen $\tan z$ und $\tanh z$ aus der Reihenentwicklung in der vorigen Aufgabe eine Reihenentwicklung für $\tan z$.

32.) Die Bernoulli-Polynome $B_n(x)$ sind ebenfalls durch eine Reihendarstellung bestimmt:

$$\sum_{n\geq 0} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{te^{tx}}{e^t - 1}.$$

Man zeige die folgenden Beziehungen:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} x^k, \quad n \geq 0,$$
$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n-k+1} B_k(x), \quad n \geq 0.$$

33.) Wir betrachten die Potenzsummen (für $m \geq 1$ und $n \geq 0$):

$$S_m(n) := \sum_{k=1}^{n} k^m.$$

Man zeige mit Hilfe der Euler'schen Summenformel und den Beziehungen für die Bernoullizahlen und Bernoulli-Polynome die explizite Formel:

$$S_m(n) = \frac{B_{m+1}(n+1) - B_{m+1}}{m+1}.$$

34.) Wir betrachten die Familie $\mathcal{Q}$ der geordneten Mengenpartitionen: also Zerlegungen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ (mit $n \geq 0$) in nichtleere disjunkte Teilmengen (= Blöcke) $S_1, \ldots, S_k$ (mit $0 \leq k \leq n$), wobei jetzt aber im Unterschied zu den in der Vorlesung kennengelernten "gewöhnlichen Mengenpartitionen" die Reihenfolge der Teilmengen S_i wesentlich ist! Die formale Beschreibung für die Familie $\mathcal{Q}$ lautet somit

$$\mathcal{Q} = \mathcal{B}^{\langle * \rangle},$$

wobei $\mathcal{B}$ die Familie der "Blöcke" (siehe Vorlesung) bezeichnet. Man bestimme die exponentiell erzeugende Funktion der Anzahl Q_n der geordneten Mengenpartitionen von $\{1, \dots, n\}$ und ermittle mit Hilfe der in der Vorlesung kennengelernten Vorgangsweise zur Bestimmung des asymptotischen Verhaltens der Koeffizienten bei Vorliegen eines dominanten Pols das asymptotische Verhalten der Q_n (Hauptterm zusammen mit einer $\mathcal{O}$-Abschätzung für den Rest genügt).

35.) Zeigen Sie mit Hilfe der Stirling-Formel für die Faktoriellen:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \cdot \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{5140n^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$$

die Entwicklung:

$$[z^n](1-z)^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(2 + \frac{3}{4n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

36.) Man zeige für die in der Vorlesung definierten q-Binomialkoeffizienten die Rekursionsformel

$$\binom{n+1}{k+1}_q = \binom{n}{k+1}_q + q^{n-k}\binom{n}{k}_q.$$

Welche Zahlen ergeben sich im Grenzwert $q \to 1$?