Übungsblatt 7 für Diskrete Methoden

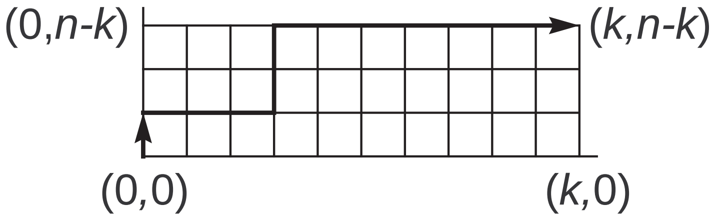
37.) Sei P_n die Menge aller Mengenpartitionen von $\{1, 2, \ldots, n\}$. Für $\pi, \sigma \in P_n$ sei $\pi \leq \sigma$ genau dann, wenn jeder Block von π in einem Block von σ enthalten ist. (π heißt dann Verfeinerung von σ.) Zeigen Sie, daß $(P_n, \leq)$ eine Halbordung ist und zeichnen Sie für $n = 3$ das Hasse-Diagramm.

38.) (a) Zeigen Sie für die q-Binomialkoeffizienten folgende alternative Rekursion:

$$\binom{n+1}{k+1}_q = \binom{n}{k}_q + q^{k+1}\binom{n}{k+1}_q.$$

(b) Zeigen Sie: $\binom{n}{k}_q$ ist für $0 \leq k \leq n$ ein Polynom vom Grad $k(n-k)$ in q.

39.) Sei $\binom{n}{k}_q = \sum_{\ell=0}^{k(n-k)} a_{n,k,\ell} q^\ell$. Zeigen Sie, daß die Koeffizienten $a_{n,k,\ell}$ dann die folgende kombinatorische Deutung besitzen: es gibt $\binom{n}{k} = \binom{n}{k}_1$ Möglichkeiten, im unten abgebildeten Gitter vom Punkt $(0, 0)$ zum Punkt $(k, n-k)$ zu gelangen, ohne eine Schritt nach links oder nach unten zu machen. $a_{n,k,\ell}$ ist die Anzahl derjenigen dieser Wege, für die die Fläche zwischen dem Weg und der x-Achse gleich ℓ ist.



40.) Beweisen Sie den Heiratssatz mit vollständiger Induktion nach der Anzahl der Damen (**Hinweis:** wie beim Beweis im Satz von Dilworth ist auch hier eine Fallunterscheidung notwendig).

41.) Sei G eine endliche Gruppe und U eine Untergruppe. Zeigen Sie mit Hilfe des Heiratssatzes, daß es ein gemeinsames Repräsentationssystem für die Links- und Rechtsnebenklassen von U in G gibt (d.h. es gibt $a_1, \ldots, a_k$, sodaß $a_1U, \ldots, a_kU$ alle Linksnebenklassen und $Ua_1, \ldots, Ua_k$ alle Rechtsnebenklassen sind).

42.) Stellen Sie die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

als konvexe Linearkombination von Permutationsmatrizen dar, wobei Sie nach dem Beweis des Satzes von Birkhoff und von Neumann vorgehen sollen.