Übungsblatt 9 für Diskrete Methoden

49.) Bestimmen Sie mit dem Lemma von Burnside auf wie viele Arten die Innenflächen eines würfelförmigen Raumes mit den Farben weiß, gelb und grün gefärbt werden können, wenn Färbungen, die durch Drehungen des Würfels im Raum auseinander hervorgehen, identifiziert werden.

50.) Wie Aufgabe 49.), jedoch für die Seitenflächen (die Grundfläche bleibt ungefärbt) einer quadratischen Pyramide.

51.) Lösen Sie die Aufgabe 49.) mit dem Satz von Pólya.

52.) Es Sei $ZZ_G(x_1, \ldots, x_n)$ der Zyklenzeiger einer Permutationsgruppe $G \leq S_n$. Man gebe einen Ausdruck für den Zyklenzeiger der Untergruppe der geraden Permutationen in G an.

53.) Die Moleküle der 2-amino-propionsäure (Alanin) bilden räumlich annähernd einen regulären Tetraeder in dessem Mittelpunkt ein C-Atom sitzt, während sich die Atomgruppen $-H$, $-CH_3$, $-NH_2$, $-COOH$ in den Eckpunkten befinden. Bestimmen Sie mit dem Satz von Pólya, wieviele verschiedene derartige Moleküle es gibt, die nicht durch Drehung im Raum ineinander übergeführt werden können.

54.) Man zeige folgende Verallgemeinerung des Lemmas von Burnside (auch auf den "Farben" agiert eine Permutationsgruppe): Sind D, R endliche Mengen, G, H Permutationsgruppen auf D bzw. R, und heißen zwei Funktionen $f, g : D \to R$ äquivalent, wenn es Permutationen $\pi \in G$, $\varphi \in H$ gibt, mit $\varphi \circ f = g \circ \pi$, so ist die Anzahl der Äquivalenzklassen gleich

$$\frac{1}{|G||H|} \sum_{\pi \in G, \varphi \in H} \left| \{ f \in R^D : \varphi \circ f = f \circ \pi \} \right| .$$

Hinweis: Man betrachte die Gruppe $G \times H$.