Differentialgeometrie (104.358)
Übungsblatt für den 7.3.2017

1. Gegeben seien die Abbildungen

$$a:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2+1 \end{pmatrix} \qquad b:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t^4+1 \end{pmatrix}$$

$$c:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t^3 \\ t^6+1 \end{pmatrix} \qquad d:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} sign(t)\sqrt{|t|} \\ |t|+1 \end{pmatrix}$$

$$e:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh^2(t) \end{pmatrix} \qquad f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin^2(t)+1 \end{pmatrix}$$

   Zu d: $sign$ ist die Vorzeichenfunktion: $sign(t) = 1$ für $t > 0$, $sign(0) = 0$, $sign(t) = -1$ für $t < 0$. Also $t = sign(t)|t|$.

   Auf $\mathbb{R}^2$ sei die Norm

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}, \\ (x,y) &\mapsto \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}, \end{aligned}$$

   gegeben. Untersuchen Sie die obigen Abbildungen bezüglich

   (a) Differenzierbarkeit
   (b) Regularität: Wo ist $\|\gamma'\| \neq 0$, $\gamma \in \{a,b,c,d,e,f\}$?
   (c) Injektivität

   Für welche zwei, γ_1, γ_2, der obigen Abbildungen gibt es einen Diffeomorphismus $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \psi$?

2. Gegeben sei die Kettenlinie

$$\gamma:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie den ersten Ableitungsvektor γ' (Tangentenvektor), seine Norm $\|\gamma'\|$ und den normierten ersten Ableitungsvektor $T = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$. Was sind die asymptotischen Richtungen

$$\lim_{t\to\pm\infty} T(t) \quad ?$$

   Um welchen Winkel dreht sich T in den Intervallen $(-\infty, 0)$ und $(-\infty, \infty)$?