Differentialgeometrie (104.358)
Übungsblatt für den 14.3.2017

3. Gegeben seien

   (a) Die Neil'sche Parabel, $\quad p:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$.

   (b) Der Graph der Betragsfunktion, $\quad b:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ |t| \end{pmatrix}$.

   (c) Die Gerade, $\quad g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Wie sehen die Bilder dieser Abbildungen aus?

   Für welche der drei Abbildungen gibt es einen Diffeomorphismus $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass $\gamma \circ \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma \in \{p, b, g\}$, regulär ist? (Und für welche gibt es keinen?)

   Für welche der drei Abbildungen gibt es eine bijektive, differenzierbare Abbildung $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \left(\phi^{-1}\right) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma \in \{p, b, g\}$, regulär ist? (Und für welche gibt es keine?)

4. Finden Sie reguläre Parametrisierungen für die Kegelschnitte

$$C_{\alpha,d} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2,\ x \cos\alpha + z \sin\alpha = d\},$$

   $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $d \neq 0$.

   <u>Hinweis:</u> Unterscheiden Sie die Fälle $\alpha < \frac{\pi}{4}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ und $\alpha > \frac{\pi}{4}$.

5. Zeigen Sie: Eine Abbildung

$$\begin{aligned} \gamma :\ \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} &\to \mathbb{R}^n, \\ t &\mapsto \gamma(t), \end{aligned}$$

   mit $\gamma' \neq 0$ parametrisiert eine Gerade oder ein Geradensegment, wenn $\gamma'(t)$ und $\gamma''(t)$ linear abhängig sind.

   Wie sieht in diesem Fall eine Reparametrisierung $\tilde{\gamma}(\tilde{t})$ von $\gamma(t)$ aus, für die $\tilde{\gamma}'' = 0$ gilt?

6. Vergewissern Sie sich, dass die Bogenlänge

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(\tilde{t})\| \, \mathrm{d}\,\tilde{t}$$

   einer Kurve $t \mapsto \gamma(t)$ invariant unter Reparametrisierungen ist.