Differentialgeometrie (104.358)
Übungsblatt für den 28.3.2017

11. (a) Sei $\beta : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \to \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine ebene Kurve. Dann gilt $\frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|} = \big(\cos(\psi(t)), \sin(\psi(t))\big)$ für ein $\psi : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$.
    Vergewissern Sie sich, dass
$$\kappa(t) := \frac{\det\left(\beta'(t), \beta''(t)\right)}{\|\beta'(t)\|^3} = \frac{\psi'(t)}{\|\beta'(t)\|},$$
    also, dass κ die Änderung der Richtung des Tangentialvektors misst.

    (b) Sei nun $\gamma : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \to \mathbb{R}^3$ eine bogenlängenparametrisierte Kurve im $\mathbb{R}^3$, N ein beliebiges Normalenfeld und $t_0 \in \mathcal{I}$ fix. Projizieren Sie γ orthogonal auf die Ebene durch $\gamma(t_0)$, die durch $\gamma'(t_0)$ und $N(t_0)$ aufgespannt wird. Identifizieren Sie diese Ebene mit $\mathbb{R}^2$ um eine ebene Kurve $\tilde{\gamma} : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^2$, die orthogonale Projektion von γ, zu erhalten.
    Zeigen Sie, dass
$$|\kappa(t_0)| = \left|\frac{\det\left(\tilde{\gamma}'(t_0), \tilde{\gamma}''(t_0)\right)}{\|\tilde{\gamma}'(t_0)\|^3}\right| = |T'(t_0) \cdot N(t_0)| = |\kappa_n(t_0)|.$$

12. Sei $\gamma : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve im $\mathbb{R}^3$. Beweisen Sie:

    (a) Zwei beliebige parallele Rahmen von γ unterscheiden sich durch eine konstante Rotation in der Normalebene.

    (b) Sei N ein paralleles Normalenfeld von γ. Dann ist ein Normalenfeld $\tilde{N}$ genau dann parallel, wenn es einen konstanten Winkel mit N einschließt.

    (c) Sei nun $F : \mathcal{I} \to SO(3)$ ein beliebiger Rahmen von γ und
$$\begin{aligned} R : \mathcal{I} &\to SO(3), \\ t &\mapsto R(t), \end{aligned}$$
    für jedes $t \in \mathcal{I}$ eine Rotation um einen Winkel $\alpha(t)$ in der Normalebene. In welcher Beziehung muss der Winkel $\alpha(t)$ zu den Krümmungen $\kappa_g(t), \kappa_n(t)$ und der Torsion $\tau(t)$ von $F(t)$ stehen, damit $\tilde{F} := FR$ ein paralleler Rahmen ist?

13. Zeigen Sie, dass eine Kurve genau dann auf einer Sphäre liegt, wenn die Krümmungen κ_g und κ_n eines parallelen Rahmens eine Geradengleichung im $\mathbb{R}^2$ erfüllen. Wie lässt sich der Radius der Sphäre von dieser Gleichung ablesen?

14. Gegeben sei
$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_n(t) & \kappa_g(t) \\ \kappa_n(t) & 0 & -\tau(t) \\ -\kappa_g(t) & \tau(t) & 0 \end{pmatrix},$$
    wobei $\kappa_n, \kappa_g, \tau : \mathbb{R} \supset \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ beschränkt sind und $\mathcal{I}$ kompakt ist.
    Zeigen Sie, dass
$$F(t) := \sum_{i=0}^{\infty} F_i(t) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{k} F_i(t)$$
    mit $F_0(t) = id_{\mathbb{R}^3}$ und
$$F_i(t) = \int_{t_0}^{t} F_{i-1}(\tilde{t})\phi(\tilde{t})\,\mathrm{d}\,\tilde{t} \qquad \text{für } \ i > 0$$
    auf $\mathcal{I}$ existiert und ein angepasster Rahmen für eine bogenlängenparametrisierte Kurve γ ist, deren Krümmungen und Torsion κ_n, κ_g und τ sind.
    Wie vereinfacht sich F, wenn ϕ konstant ist.