Differentialgeometrie (104.358)
Übungsblatt für den 4.4.2017

14. Gegeben sei
$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_n(t) & \kappa_g(t) \\ \kappa_n(t) & 0 & -\tau(t) \\ -\kappa_g(t) & \tau(t) & 0 \end{pmatrix},$$
wobei $\kappa_n, \kappa_g, \tau : \mathbb{R} \supset \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ beschränkt sind und $\mathcal{I}$ kompakt ist.

    Zeigen Sie, dass
$$F(t) := \sum_{i=0}^{\infty} F_i(t) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{k} F_i(t)$$
mit $F_0(t) = id_{\mathbb{R}^3}$ und
$$F_i(t) = \int_{t_0}^{t} F_{i-1}(\tilde{t})\phi(\tilde{t})\,\mathrm{d}\,\tilde{t} \qquad \text{für } \; i > 0$$
auf $\mathcal{I}$ existiert und ein angepasster Rahmen für eine bogenlängenparametrisierte Kurve γ ist, deren Krümmungen und Torsion κ_n, κ_g und τ sind.

    Wie vereinfacht sich F, wenn ϕ konstant ist.

15. Sei $\gamma : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \to \mathbb{R}^3$ eine bogenlängenparametrisierte Frenetkurve. Das *Darboux Vektorfeld* ist gegeben durch
$$D := \tau T + \kappa B.$$
Zeigen Sie, dass die Frenetgleichungen die Form
$$T' = D \times T, \qquad N' = D \times N, \qquad B' = D \times B$$
annehmen.

16. Sei $\gamma : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \to \mathbb{R}^3$ eine Frenetkurve. Zeigen Sie, dass (T, N, B) mit
$$T = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}, \quad B = \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma' \times \gamma''\|}, \quad N = B \times T$$
der Frenetrahmen der Kurve ist.

17. Gegeben sei
$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) \\ \kappa(t) & 0 \end{pmatrix},$$
wobei $\kappa : \mathbb{R} \supset \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ beschränkt und $\mathcal{I}$ kompakt ist.

    Von Beispiel 14 wissen wir, dass
$$F(t) := \sum_{i=0}^{\infty} F_i(t) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{k} F_i(t)$$
mit $F_0(t) = id_{\mathbb{R}^3}$ und
$$F_i(t) = \int_{t_0}^{t} F_{i-1}(\tilde{t})\phi(\tilde{t})\,\mathrm{d}\,\tilde{t} \qquad \text{für } \; i > 0$$
existiert und $F^{-1}F' = \phi$.

    Zeigen Sie, dass für $\gamma_0 = (\cos(\alpha_0), \sin(\alpha_0)) \in \mathbb{R}^2$
$$F(t)\gamma_0 = \begin{pmatrix} \cos\left[\int_{t_0}^{t} \kappa(\tilde{t})\,\mathrm{d}\,\tilde{t} + \alpha_0\right] \\ \sin\left[\int_{t_0}^{t} \kappa(\tilde{t})\,\mathrm{d}\,\tilde{t} + \alpha_0\right] \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\det\left(F(t)\gamma_0, F'(t)\gamma_0\right)$$

und formulieren Sie einen Fundamentalsatz für Kurven im $\mathbb{R}^2$, analog zum Fundamentalsatz für Frenetkurven im $\mathbb{R}^3$.