Differentialgeometrie (104.358)
Übungsblatt für den 25.4.2017

18. Zeigen Sie, dass der Torus

$$T^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2\}$$

mit $0 < r < R$ eine Fläche ist.

19. Berechnen Sie die induzierte Metrik des Katenoids

$$\sigma : (u, v) \mapsto \sigma(u, v) := (\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sin(v), u).$$

20. Zeigen Sie, dass eine Fläche $\sigma : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}^3$ genau dann konform parametrisiert ist, wenn die Parametrisierung Winkel erhält, das heißt, wenn Winkelmessung mit der induzierten Metrik das gleiche Ergebnis liefert wie Winkelmessung mit der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^2$.

Anmerkung/Hinweis: Es ist ausreichend, dass *rechte* Winkel erhalten bleiben.

21. Gegeben sei die Sphäre, $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, mit Radius 1 und Mittelpunkt im Ursprung. Sei $N = (0, 0, 1) \in S^2$ der Nordpol der Sphäre. Für jeden Punkt $X = (x, y, 0)$ in der x^1x^2-Ebene legen Sie nun einen Gerade durch X und N. Diese Gerade schneidet die Sphäre im Nordpol und in einem weiteren Punkt, $\tilde{X}$, und definiert so eine Abbilgung $X \mapsto \tilde{X}$. Finden Sie diese Abbildung,

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbb{R}^2 &\to S^2, \\ X &\mapsto \tilde{X}. \end{aligned}$$

Was ist das Bild von Π. Π kann als Fäche $\Pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ im $\mathbb{R}^3$ interpretiert werden. Vergewissern Sie sich, dass Π regulär und injektiv ist. Was ergibt $\lim_{X\to\infty} \Pi(X)$?

Bestimmen Sie auch die erste Fundamentalform.

Sei g eine beliebige Gerade in $\mathbb{R}^2$. Wie sieht die entsprechende Kurve $\gamma = \Pi \circ g$ aus? Wie sieht die Flächenkurve für einen Kreis in $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt im Ursprung aus?

Anmerkung: Die Umkehrabbildung, Π^{-1}, heißt stereographische Projektion.