# Differentialgeometrie (104.358)
# Übungsblatt für den 2.5.2017

22. Sei

$$\sigma : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}^3,$$
$$(u,v) \mapsto \sigma(u,v) = (u, v, z(u,v)),$$

wobei $z : U \to \mathbb{R}$ glatt ist.

Berechnen Sie die Gauß-Abbildung, die zweite Fundamentalform und den Weingartenoperator.

Sei nun $(u_0, v_0)$ ein stationärer Punkt der Funktion $z$. Wie sehen an diesem Punkt der Weingartenoperator und die Gauß-Krümmung aus? Nehmen Sie nun zusätzlich an, $(u,v)$ Krümmungslinienparameter sind. Was ist dann eine Bedingung an $z$ für einen Nabelpunkt, was eine für einen Flachpunkt.

23. Angenommen eine Fläche ist implizit durch eine Gleichung $F(x,y,z) = 0$ mit einer glatten Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} F \neq 0$ dort wo $F(x,y,z) = 0$ gegeben. Eine Parametrisierung $\sigma : (u,v) \mapsto \sigma(u,v)$ dieser Fläche erfüllt also $F \circ \sigma = 0$. Zeigen Sie, dass die Gauß-Abbildung durch

$$n = \pm \frac{(\operatorname{grad} F) \circ \sigma}{\|(\operatorname{grad} F) \circ \sigma\|}$$

gegeben ist (grad bezeichnet den Gradienten, also den Vektor der partiellen Ableitungen).

24. Für $r > 0$ ist eine Parametrisierung der Möbiusschleife durch

$$(u,v) \mapsto \sigma(u,v) = r\big(\cos(2u), \sin(2u), 0\big) + v\big(\cos(u)\cos(2u), \cos(u)\sin(2u), \sin(u)\big)$$

gegeben.

Zeigen Sie, dass $\sigma(u+\pi, 0) = \sigma(u, 0)$, aber $n(u+\pi, 0) = -n(u, 0)$.

25. Untersuchen Sie, wie sich die erste und zweite Fundamentalform einer Fläche unter Reparametrisierungen und euklidischen Bewegungen ändern.