Differentialgeometrie (104.358)
Übungsblatt für den 16.5.2017

30. Sei σ eine Fläche, deren Bild auf einer Sphäre mit Radius r liegt. Berechnen Sie den Krümmungstensor via
$$R\xi = \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \xi - \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \xi,$$
um zu zeigen, dass
$$R = -\frac{1}{r^2} \sigma_u \wedge \sigma_v.$$

31. Sei $F = (\sigma_u, \sigma_v, n)$ ein angepasster Rahmen für die Fläche $\sigma : \mathbb{R}^3 \supseteq U \to \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass
$$\begin{pmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} F^{-1} F_u \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} F^{-1} F_v$$
genau dann schiefsymmetrische Matrizen sind, wenn
$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$
konstant ist.

32. Beweisen Sie: In Krümmungslinienkoordinaten haben die Codazzi-Gleichungen die Form
$$0 = \kappa_{1v} + \frac{E_v}{2E}(\kappa_1 - \kappa_2) = \kappa_{2u} - \frac{G_u}{2G}(\kappa_1 - \kappa_2).$$

33. Zeigen Sie, dass die Gauss Gleichung für eine konform parametrisierte Fläche die Gestalt
$$K = -\frac{1}{2E} \Delta \ln E$$
annimmt.