Differentialgeometrie (104.358)
Übungsblatt für den 23.5.2017

34. Es sei eine Fläche implizit durch $F(x,y,z) = 0$ gegeben mit einer glatten Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} F \neq 0$ dort wo $F(x,y,z) = 0$. Eine Parametrisierung $\sigma : (u,v) \mapsto \sigma(u,v)$ dieser Fläche erfüllt also $F \circ \sigma = 0$. Sei $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ eine Kurve auf dieser Fläche, also $F \circ \gamma = 0$.

    Zeigen Sie, dass der natürliche Streifen von γ durch

    $$N = +\frac{\operatorname{grad} F \circ \gamma}{\|\operatorname{grad} F \circ \gamma\|} \qquad \text{oder} \qquad N = -\frac{\operatorname{grad} F \circ \gamma}{\|\operatorname{grad} F \circ \gamma\|}$$

    gegeben ist.

    Verwenden Sie dies, um zu beweisen, dass die zwei Kurven

    $$\gamma_\pm : t \mapsto \gamma_\pm(t) = (1, t, \pm t)$$

    auf dem einschaligen Hyperboloid

    $$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0\}$$

    asymptotisch und prä-geodätisch, aber keine Krümmungslinien sind.

35. Beweisen Sie den Satz von Joachimsthal:

    Angenommen zwei Flächen schneiden sich entlang einer Kurve so, dass die Kurve eine Krümmungslinie auf einer der beiden Flächen ist. Dann ist die Kurve auch eine Krümmungslinie auf der anderen Fläche genau dann, wenn sich die zwei Flächen in konstantem Winkel schneiden, also die Normalvektoren einen konstanten Winkel einschließen.

36. Beweisen Sie den Satz von Euler. Zeigen Sie dazu zuerst, dass Sie eine Basis (e_1, e_2) von $\mathbb{R}^2$ so wählen können, dass $d_{(u,v)}\sigma(e_i)$ Krümmungsrichtungen von σ bei $\sigma(u,v)$ sind und und so, dass (e_1, e_2) orthonormal bezüglich der ersten Fundamentalform sind. Dann ist (e_1, e_2) orthogonal bezüglich der zweiten Fundamentalform. Betrachten Sie jetzt die Tangentialrichtung $e_\vartheta = e_1 \cos\vartheta + e_2 \sin\vartheta$.

37. Für einen festen Punkt $\sigma(u,v)$ auf einer Fläche, zeigen Sie, dass keine Asymptoten durch $\sigma(u,v)$ laufen können, wenn $K(u,v) > 0$ und dass eine Asymptote in zwei verschiedenen Richtungen durch $\sigma(u,v)$ laufen kann, wenn $K(u,v) < 0$. Was lässt sich im Fall $K(u,v) = 0$ sagen?