Differentialgeometrie (104.358)
Übungsblatt für den 30.5.2017

38. Sei σ eine Fläche, die längs einer Kurve γ tangential zu einer Ebene ist — die Tangentialebenen von σ entlang γ sind also alle gleich.

    Zeigen Sie, dass die Punkte der Kurve γ auf σ parabolisch oder flach sind, also dass die Gauß-Krümmung K verschwindet.

39. Seien σ_1 und σ_2 zwei Flächen, die sich längs einer Kurve γ so schneiden, dass ihre Gauß-Abbildungen linear unabhängig sind.

    Zeigen Sie, dass γ genau dann eine Prä-Geodätische von σ_1 und σ_2 ist, wenn γ in einer Geraden liegt.

40. Sei $\sigma : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $\Lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Isometrie des Euklidischen $\mathbb{R}^3$, die $\sigma(U)$ invariant lässt, $\Lambda(\sigma(U)) = \sigma(U)$.

    Sei weiters $p_0 = \sigma(u_0, v_0)$ ein Punkt auf σ und $\xi \perp n(u_0, v_0) \subset \mathbb{R}^3$ eine Tangentialrichtung so, dass
    $$\Lambda(p_0) = p_0, \qquad \Lambda(\xi) = \xi.$$
    Zeigen Sie, dass die Geodätische γ_ξ mit $\gamma_\xi(0) = p_0$ und ${\gamma_\xi}'(0) = \xi$ invariant unter Λ ist, also dass
    $$\Lambda \circ \gamma_\xi = \gamma_\xi.$$

41. Parametrisieren Sie, z.B. mit Hilfe des vorigen Beispiels, die Sphäre
    $$S^2(R) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$
    mit geodätischen Polarkoordinaten um $p_0 = (0, 0, R)$ und berechnen Sie die erste Fundamentalform.