Differentialgeometrie (104.358)
Übungsblatt für den 13.6.2017

42. Sei $\sigma : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \psi : \tilde{U} \to \mathbb{R}^3$ mit $\psi : \mathbb{R}^2 \supseteq \tilde{U} \to U$ eine Reparametrisierung von σ. Sei $\gamma : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve.

    Zeigen Sie, dass γ genau dann eine Prä-Geodätische auf σ ist, wenn γ eine Prä-Geodätische auf $\tilde{\sigma}$ ist.
    Zeigen Sie, dass γ genau dann eine Geodätische auf σ ist, wenn γ eine Geodätische auf $\tilde{\sigma}$ ist.

43. Wie sehen die Geodäten auf der Fläche

$$\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,$$
$$(u,v) \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ \cosh(u) \end{pmatrix}$$

    aus? Hinweis: Ein geeigneter Parameterwechsel vereinfacht die Sache.

44. Verwenden Sie den Satz von der impliziten Funktion um direkt zu zeigen, dass eine implizit definierte Untermannigfaltigkeit eine lokale Parametrisierung hat.

    Hinweis: Verwenden Sie die Zerlegung $\mathbb{R}^n = \ker \mathrm{d}_p F \times (\ker \mathrm{d}_p F)^\perp$.

45. Seien $F_1, F_2 : \mathbb{R}^3 \supseteq U \to \mathbb{R}$ mit $(\operatorname{grad} F_1 \times \operatorname{grad} F_2)(p) \neq 0$ for all $p \in U$. Zeigen Sie, dass die Gleichungen $F_1(p) = 0 = F_2(p)$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ definieren. Zeigen Sie damit, dass die Kegelschnitte

$$C_{\alpha,d} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2,\ x\cos\alpha + z\sin\alpha = d\}$$

    mit $\alpha \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$ 1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten sind.

46. Beweisen Sie, dass Gerono's Lemniskate

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 - x^2 + y^2 = 0\}$$

    keine Untermannigfaltigkeit ist.