Differentialgeometrie (104.358)
Übungsblatt für den 20.6.2017

46. Beweisen Sie, dass die spezielle orthogonale Gruppe des n-dimensionalen Euklidischen Raumes $SO(n) \subset M(n \times n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ eine $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

47. Sei γ gegeben durch

$$\begin{aligned} \gamma: \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) &\to \mathbb{R}^2, \\ t &\mapsto \big(\sin(t), \cos(t)\sin^2(t)\big). \end{aligned}$$

Ist γ regulär? Wie sieht das Bild von γ aus? Zeigen Sie, dass das Bild von γ keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.

48. Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

Zeigen Sie: Sei $M = F^{-1}(\{0\})$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ und $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist $p \in M$ ein kritischer Punkt (also möglicher Extremwert) von $\phi := \Phi\big|_M : M \to \mathbb{R}$ genau dann, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, für das (λ, p) ein kritischer Punkt der Funktion

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}, \\ (\lambda, p) &\mapsto \Phi(p) - \lambda F(p), \end{aligned}$$

ist.