Differentialgeometrie (104.358)
Übungsblatt für den 27.6.2017

49. Sei $M = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

    (a) Finden Sie zwei Tangential-Vektorfelder ξ, η so, dass $[\xi, \eta] = 0$, aber $\nabla_\xi \eta \neq 0$, an zumindest einem Punkt p.

    (b) Finden Sie zwei Tangential-Vektorfelder ξ, η so, dass $[\xi, \eta] \neq 0$, aber $\nabla_\xi \eta = 0$, an zumindest einem Punkt p.

50. Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ gegeben durch $M = M_1 \cup M_2$, wobei $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ und M_2 das Bild der Abbildung

    $$\begin{aligned} \gamma :\ \mathbb{R} \supset (1, \infty) &\to \mathbb{R}^2, \\ t &\mapsto \Big(\big(1 - \tfrac{1}{t}\big) \cos t, \big(1 - \tfrac{1}{t}\big) \sin t \Big), \end{aligned}$$

    ist.

    Wie sieht M aus? Zeigen Sie, dass M keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.

51. Sei $(r, \vartheta) \mapsto \sigma(r, \vartheta)$ eine Parametrisierung mit geodätischen Polarkoordinaten und sei die induzierte Metrik rotationssymmetrisch, also $\frac{\partial G}{\partial \vartheta} = 0$, und so, dass die Gauß-Krümmung konstant ist.

    Finden Sie alle harmonischen Funktionen ϕ, die rotationssymmetrisch sind, also $\frac{\partial(\phi \circ \sigma)}{\partial \vartheta} = 0$.